Nouvelles annales de mathématiques

Jules Vieille

Solution du problème de géométrie analytique proposé au concours général de 1849

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 317-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__317_0>

SOLUTION DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE proposé au concours général de 1849;

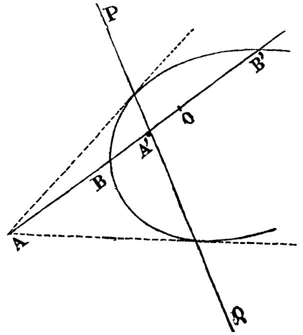
PAR M. JULES VIEILLE.

Énoncé. Étant données, dans un même plan, une ellipse et une droite, située en dehors de la courbe, on suppose qu'on prenne sur cette droite divers systèmes de deux points (a, a') conjugués relativement à l'ellipse, de manière que la polaire de l'un de ces points a passe par l'autre a', et l'on propose :

1° De démontrer qu'il existe dans le plan deux points fixes tels, que de chacun d'eux on voit chaque segment aa' sous un angle droit; 2° de déterminer le lieu géométrique de ces points, lorsque la droite donnée se meut parallèlement à elle-même.

Solution. Première partie. Le théorème en question étant vrai pour une section conique quelconque, nous ne supposerons pas qu'il s'agisse spécialement d'une ellipse; la démonstration repose sur une propriété des lignes du second ordre, que nous allons d'abord rappeler :

fig. 1.

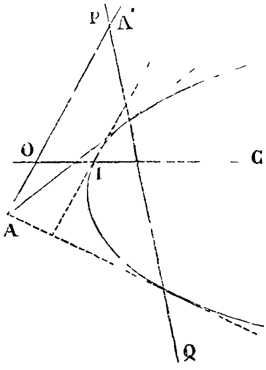


Lorsque d'un point A, pris à volonté dans le plan d'une conique, on mène une transversale quelconque ABB', on sait que le point A' où cette transversale rencontre la polaire PQ du point A, est le conjugué harmonique du point A par rapport aux extrémités B, B' de la corde BB'; cette propriété s'exprime par la relation

$$(1) \qquad \overline{OB}^2 = OA.OA',$$

O étant le milieu de la corde. Remarquons que les segments OA, OA' sont situés d'un même côté de l'origine commune O.

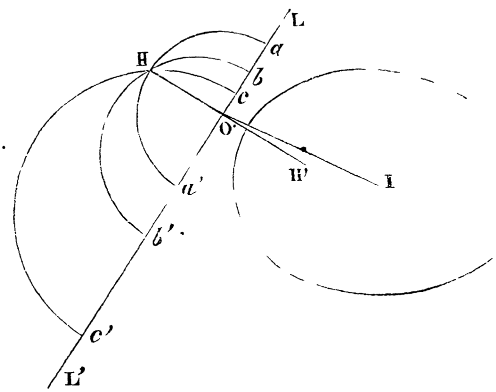
fig. 2.



Quand la transversale ne rencontre pas la courbe, les points B et B' n'existent plus; mais l'analyse continue à donner, pour les coordonnées du point O, milieu de la corde imaginaire, des valeurs réelles, en sorte que ce point existe toujours, et il se trouve à l'intersection de la transversale AA' avec le diamètre CI conjugué aux cordes parallèles à cette transversale. L'expression analytique de la demi-corde OB prend la forme $\rho\sqrt{-1}$; son carré $-\rho^2$ est réel et négatif, et les segments OA, OA', situés maintenant de côtés différents du point O, sont de signes contraires, en sorte que l'équation (1) subsiste encore, en grandeurs et en signes.

Cela posé, considérons une droite fixe LL′ qui ne rencontre pas la conique ; et sur cette droite prenons trois couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), c'est-à-dire tels, que la polaire de l'un des points a passe par l'autre a'.

fig. 3.



Il résulte de ce qui précède, que si l'on mène le diamètre conjugué à la direction LL′, lequel rencontre en O la droite LL′, et qu'on désigne par $-\rho^2$ le carré de la demi-corde (imaginaire) formée par cette transversale, on aura (en ne considérant que les grandeurs absolues des segments)

$$(2) \qquad \rho = Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc'$$

Donc, si l'on décrit des cercles sur chacun des segments aa', bb', cc' comme diamètres, ces trois cercles auront une corde commune HOH′, dont la moitié OH sera précisément égale à ρ. Tous les cercles décrits sur les segments en nombre infini qu'on peut ainsi former sur LL' avec des systèmes de points conjugués, se croiseront en ces deux points fixes H, H'; et de chacun de ces points on verra chaque segment sous un angle droit. C. Q. F. D. (*).

Remarques. I. Les points H, H' existeront toujours, quand la droite LL' sera située en dehors de la conique, parce que les segments conjugués (Oa, Oa') sont alors comptés en sens contraire à partir du point O (l'expression analytique $-\rho^2$ de leur produit étant négative). Le point O est donc compris dans l'intérieur de chaque segment aa', bb', cc', ...; et, par conséquent, les cercles se coupent tous.

Au contraire, les points H, H' n'existeront plus, si la droite LL' est sécante; car Oa, Oa' sont alors d'un même côté du point O, lequel est en dehors de chaque segment; et, par suite, les cercles sont ou intérieurs les uns aux autres, ou extérieurs. Seulement, comme toutes les tangentes menées du point O à ces différents cercles seront égales en vertu des relations (2), ces cercles auront un axe radical commun passant par le point O, et cet axe peut encore être regardé comme une sécante commune.

II. Si la droite LL' était tangente à la conique, les deux points H, H' se confondraient avec le point de contact.

Si LL' est une directrice, l'un des points H, H' sera le foyer correspondant.

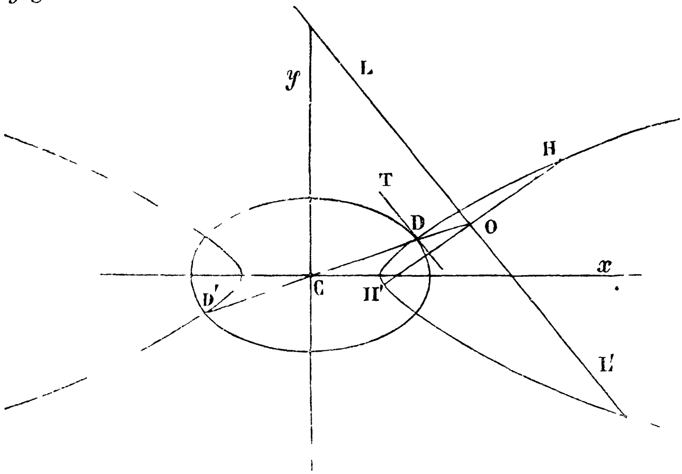
(*) Les six points (a, a'), (b, b'), (c, c'), sont dits en *involution*, et le point O est le *point central* de l'involution. Les points de rencontre de la transversale LL' avec la courbe sont tels, que chacun d'eux est lui-même son conjugué : c'est pourquoi ces deux points (qui sont imaginaires dans le cas actuel) s'appellent *points doubles* de l'involution. Ils sont equidistants du point central.

III. En général, pour construire ces deux points, il suffira de décrire un seul cercle sur un segment formé par deux points conjugués pris sur LL′, puis de tracer le diamètre IO, conjugué à la direction de LL′; enfin, de mener du point O une perpendiculaire à LL′ jusqu'à la rencontre du cercle

IV. Dans un plan perpendiculaire au plan de la figure imaginons une circonférence de cercle décrite du point O comme centre, avec OH pour rayon; il est clair que de tout point S pris sur cette circonférence, on verra sous un angle droit chacun des segments aa'. bb', ... Regardons ce point S comme le sommet d'un cône ayant pour base la conique proposée. Nous nous bornerons à énoncer le théorème suivant, extrait des Leçons de M. *Chasles*, et qu'il est aisé de démontrer par la perspective : *Tout plan parallèle au plan conduit par le point* S *et la droite* LL′, *coupera ce cône suivant un cercle dont le centre sera sur la droite menée du point* S *au pôle de la droite* LL′.

Seconde partie. Supposons maintenant que la transversale LL′ se meuve parallèlement à elle-même, et cherchons le lieu géométrique des points H, H′. D'après ce qui précède, on serait conduit à prendre pour axes coordonnés deux diamètres conjugués de la conique, dont l'un parallèle à la transversale. On arriverait ainsi, par un calcul assez simple, à l'équation du lieu; mais, pour en reconnaître les propriétés, il est préférable d'employer des coordonnées rectangulaires.

fig 4.



Considérons d'abord le *cas de l'ellipse*, et prenons pour axes coordonnés les axes de la courbe

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{Équation de l'ellipse.} & a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \\ \text{Équation de la droite LL'} & y = mx + n. \end{cases}$$

Soient X, Y les coordonnées du point H; x_1, y_1 celles du point O; $\rho\sqrt{-1}$ la demi-corde (imaginaire) fournie par LL', ρ est, comme on l'a vu, égal à OH. On a donc

$$(2)\qquad \begin{cases} X = x_1 + \dfrac{\rho m}{\sqrt{1+m^2}}, \\ Y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(X - x_1). \end{cases}$$

Il est aisé d'obtenir x_1, y_1 et ρ en fonction de l'indéterminée n et des constantes données, puis l'élimination de n entre les équations (2) fournira l'équation du lieu.

Si l'on désigne par x' et x'' les abscisses des points d'intersection de LL' avec l'ellipse, l'expression du carré de la demi-corde imaginaire sera

$$-\rho^2 = \frac{(x' - x'')^2(1 + m^2)}{4};$$

or les équations (1) donnent, par l'élimination de y,

$$x' - x'' = \frac{2ab\sqrt{n^2 - h^2}}{h^2}\sqrt{-1},$$

en posant, pour abréger,

$$h^2 = a^2m^2 + b^2;$$

h est l'ordonnée à l'origine d'une tangente menée à l'ellipse parallèlement à LL'; elle est supposée plus petite que n. On aura donc

$$\rho = \frac{ab\sqrt{1+m^2}}{h^2}\sqrt{n^2 - h^2}.$$

Quant aux coordonnées x_1, y_1 du milieu O de la corde, on a

$$x_1 = -\frac{a^2mn}{h^2}, \quad y_1 = -\frac{b^2}{a^2m}x_1 = \frac{nb^2}{h^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (2), donnent

$$(3)\quad \mathrm{X} = \frac{am(b\sqrt{n^2-h^2} - an)}{h^2}, \quad \mathrm{Y} = -\frac{1}{m}\mathrm{X} - \frac{nc^2}{h^2}, \quad a^2 - b^2 = c^2.$$

Bien que nous n'ayons considéré que le point H, les équations (3) conviennent aussi au point H', en prenant le radical $\sqrt{n^2 - h^2}$ avec le signe —. De la seconde de ces équations, on tire n, qu'on substitue dans l'autre, et il vient, après transposition et élévation au carré, l'équation

$$(4)\qquad a^2m^2y^2 - b^2x^2 = -\frac{a^2b^2c^2m^2}{h^2}.$$

Elle représente une *hyperbole rapportée à son centre et à ses axes*. L'axe transverse est celui des x; soient a' et b' les longueurs des demi-axes, on a

$$a' = \frac{mac}{h}, \quad b' = \frac{bc}{h}, \quad \text{d'où} \quad a'^2 + b'^2 = c^2;$$

donc *l'hyperbole et l'ellipse sont homofocales*, et, par suite, *elles se coupent orthogonalement.*

Les quatre points d'intersection, symétriques deux à deux par rapport aux axes, ont pour coordonnées

$$x = \pm \frac{a^2 m}{h}, \quad y = \pm \frac{b^2}{h};$$

deux d'entre eux coïncident avec les extrémités D, D′ du diamètre CO : ce qui devait être, d'après les considérations exposées plus haut. On se rend d'ailleurs aisément compte de la section orthogonale des deux courbes, en remarquant que lorsque la transversale LL′ prend la position de la tangente DT à l'ellipse, les points H et H′ se confondent avec le point de contact D, et, par suite, la sécante HH′ devient tangente à l'hyperbole; mais cette sécante n'a pas cessé d'être perpendiculaire à LL′, quelque voisins que H et H′ soient du point D; donc la tangente à l'hyperbole, menée par le point D, doit couper à angle droit la tangente à l'ellipse.

Les équations des asymptotes sont

$$y = \pm \frac{b}{am} x.$$

Ces droites demeurent donc les mêmes pour toutes les ellipses semblables et concentriques à l'ellipse proposée.

L'équation (4) ne contient le paramètre m qu'au carré : le lieu géométrique resterait donc le même, si, au lieu des transversales parallèles à LL′, on considérait un système de transversales, pour lesquelles m serait changé en $-m$, c'est-à-dire inclinées symétriquement sur l'axe des x.

Cette remarque explique le résultat que donne l'équation (4) dans le cas particulier du cercle. Soit $a = b$; l'hyperbole dégénère en deux droites dont les équations sont

$$y = \pm \frac{1}{m} x.$$

Cependant il est évident qu'alors le diamètre CO devient perpendiculaire à LL′, et, par conséquent, les points H, H′ sont tous situés sur *cette droite unique*, dont l'équation est

$$y = -\frac{1}{m}x.$$

Quant à l'autre droite $y = \frac{1}{m}x$, elle répond au cas où l'on considérerait la direction symétrique de LL′ par rapport à l'axe des x.

Si dans l'équation (4) on change b^2 en $-b^2$, on aura

$$(5) \qquad a^2m^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2c^2m^2}{h^2} \qquad h^2 = a^2m^2 - b^2;$$

équation qui résout le problème proposé, dans le *cas où la conique donnée* est *une hyperbole; le lieu des points* H, H′ est donc alors *une ellipse homofocale.*

Enfin, *si la conique donnée* est *une parabole,* on peut, sans recommencer les calculs, déduire encore la solution de l'équation (4). A cet effet, on transportera d'abord l'origine du centre C de l'ellipse au sommet A, et l'équation (4) deviendra

$$a^2m^2y^2 - b^2x^2 + 2b^2ax = \frac{a^2b^4(1+m^2)}{a^2m^2+b^2};$$

puis, si l'on pose

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{p}{2},$$

p étant une constante, on en tire

$$b^2 = ap - \frac{p^2}{4}.$$

Substituant cette valeur de b^2 dans l'équation ci-dessus, puis divisant par a^2, et faisant croître a indéfiniment, on trouve à la limite, pour l'équation du lieu,

$$y^2+\frac{2p}{m^2}x=\frac{p^2(m^2+1)}{m^4};$$

elle représente *une parabole ayant même axe et même foyer* que la proposée, mais *dirigée en sens contraire.*