E. LIONNET

Note sur les approximations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 266-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__266_1>

NOTE SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES;

Par M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Descartes (*).

---

1. *Étant donnée une limite δ des erreurs commises sur les facteurs d'un produit $abc \ldots kl$, trouver une limite de l'erreur e commise sur le produit.*

Soient a', b', c', etc., des valeurs de a, b, c, etc., approchées par défaut à moins de δ. En remplaçant a par a', on a diminué le facteur a d'un nombre moindre que δ, et le produit $abc \ldots kl$ d'un nombre moindre que $\delta bc \ldots kl$; pareillement, en remplaçant b par b' dans le produit $a'bc \ldots kl$, on a diminué ce produit d'un nombre moindre que $\delta a'c \ldots kl$, et, à plus forte raison, d'un nombre moindre que $\delta ac \ldots kl$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'en remplaçant l par l' dans le produit $a'b'c' \ldots k'l$, on ait diminué ce produit d'un nombre moindre que $\delta ab \ldots k$. Donc, en définitive, on aura $e < \delta s_{n-1}$, s_{n-1} désignant

(*) *Voyez*, pour plus de détails, les Compléments d'arithmétique, livre VI.

la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des n facteurs a, b, c,..., k, l.

En général, si l'on désigne par p le produit des facteurs non modifiés, et par n le nombre des facteurs modifiés tous par défaut, tous par excès, ou les uns par défaut et les autres par excès, des raisonnements semblables conduiront à la relation

$$e < \delta p s_{n-1},$$

dans laquelle s_{n-1} représente la somme des produits $n-1$ à $n-1$ des facteurs modifiés, chaque facteur modifié par voie d'augmentation étant remplacé par sa valeur approchée par excès.

II. *Étant donnée une limite δ de l'erreur commise sur un nombre a, trouver une limite de l'erreur commise sur la racine $m^{\text{ième}}$ de ce nombre.*

Soit α une valeur de a approchée par excès à moins de δ. En remplaçant a par α dans $\sqrt[m]{a}$, l'erreur e commise sur cette racine est $\sqrt[m]{\alpha}-\sqrt[m]{a}=x-y$, en posant $\sqrt[m]{\alpha}=x$ et $\sqrt[m]{a}=y$. Or on a

$$e=x-y=\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+y^{m-1})(x-y)}{x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+y^{m-1}},$$

ou

$$e=\frac{x^m-y^m}{x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+y^{m-1}}.$$

De plus, le dividende $x^m-y^m=\alpha-a<\delta$, et la relation $\alpha>a$ donne

$$\sqrt[m]{\alpha}>\sqrt[m]{a}, \quad \text{ou} \quad x>y;$$

donc en remplaçant x par y au diviseur, qui devient alors $y^{m-1}+y^{m-1}+y^{m-1}+$ etc., ou my^{m-1}, on diminuera ce diviseur, et on aura

$$e < \frac{\delta}{m\,\gamma^{m-1}},$$

ou

$$(1)\qquad e < \frac{\delta}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

En désignant par α une valeur de a approchée par défaut à moins de δ, des raisonnements semblables conduisent à la relation

$$(2)\qquad e < \frac{\delta}{m\sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}.$$

Corollaire. Les relations (1) et (2) montrent que si a est un nombre décimal plus grand que l'unité et que $\delta = \frac{1}{10^n}$, on aura $e < \frac{1}{10^n}$; donc, *pour obtenir la racine m^{ieme} d'un nombre décimal plus grand que l'unité, à moins d'une unité décimale du n^{ieme} ordre, il suffit d'opérer sur une valeur du nombre proposé, approchée à moins de la même unité décimale.* Ce principe peut d'ailleurs être considéré comme une conséquence de celui que nous allons démontrer.

III. *Pour extraire la racine m^{ieme} d'un nombre entier a avec une erreur moindre que l'unité, il suffit de connaître plus de la m^{ieme} partie du nombre de ses chiffres à partir de la gauche.*

En supposant que n soit le nombre des chiffres de a, nous démontrerons d'abord que si l'on prend sur la gauche de a un nombre de chiffres plus grand que $\frac{n}{m}$, ou au moins égal à $\frac{n+1}{m}$, en remplaçant tous les chiffres suivants par des zéros, l'erreur e commise sur $\sqrt[m]{a}$ sera moindre qu'une unité. En effet, le nombre α qu'on substitue à a dans $\sqrt[m]{a}$ contenant n chiffres est au moins égal à 10^{n-1}; de plus, le nombre des chiffres pris sur la gauche de n étant au moins égal à $\frac{n+1}{m}$, la partie négligée contient au plus $n - \frac{n+1}{m}$ ou $\frac{n(m-1)-1}{m}$ chiffres; donc cette partie est moindre que $10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$. Or on a la relation

$$e < \frac{\delta}{m\sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{\delta}{m\alpha^{\frac{m-1}{m}}} \qquad \text{(II)},$$

dans laquelle e désigne l'erreur commise sur $\sqrt[m]{a}$ en remplaçant a par une valeur α approchée par défaut à moins de δ; donc si l'on fait $\delta = 10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$ et $\alpha = 10^{n-1}$, on aura, à plus forte raison,

$$e < \frac{10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}}{m \times 10^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{10^{\frac{m-2}{m}}}{m}.$$

Remplaçant m successivement par chacun des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on voit immédiatement que $10^{\frac{m-2}{m}}$ est moindre que m; il en est de même pour une valeur quelconque de m supérieure à 9, puisque $10^{\frac{m-2}{m}}$ est constamment moindre que 10; donc, quel que soit le degré m de la racine à extraire, on aura $e < 1$. Il en résulte que *pour extraire la racine $m^{ième}$ d'un nombre entier composé de n chiffres, avec une erreur moindre qu'une* *unité, il suffit de prendre sur la gauche de ce nombre au moins $\frac{n+1}{m}$ chiffres, en remplaçant tous les autres par des zéros, puis d'extraire la racine m^{ieme} du nombre ainsi obtenu par excès, à moins d'une unité.* Ainsi, par exemple, pour extraire la racine $12^{ième}$ d'un nombre de 23 chiffres, avec une erreur moindre qu'une unité, il suffira de connaître ses deux premiers chiffres à gauche.

IV. *Trouver, avec une erreur moindre qu'un millimètre, 1° le diamètre d'un cercle dont l'aire est un mètre carré; 2° le diamètre d'une sphère dont le volume est un mètre cube.*

Prenons le mètre pour unité de longueur, le mètre carré pour unité de surface, le mètre cube pour unité de volume, et désignons par x la mesure du diamètre demandé.

1°. On détermine la valeur de x par l'égalité

$$\frac{1}{4}\pi x^2 = 1, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{4}{\pi}};$$

de sorte qu'il s'agira d'extraire à moins d'un millième la racine carrée du quotient de la division de 4 par π; or ce quotient est plus grand que l'unité, donc il suffit d'en obtenir une valeur approchée à moins d'un millième (II, cor.), c'est-à-dire de calculer sa partie entière et ses trois premières décimales. La division abrégée de Fourrier donne immédiatement $\frac{4}{\pi} = 1,273$ etc., et en extrayant la racine carrée de 1,273 par excès à moins d'un millième, on a $x = 1,129$ avec une erreur moindre qu'un millième.

2°. On détermine x par l'égalité

$$\frac{1}{6}\pi x^3 = 1, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Le quotient $\frac{6}{\pi}$ étant plus grand que l'unité, on détermine ses quatre premiers chiffres à gauche 1, 9, 0, 9 par la division abrégée de Fourrier, et en extrayant la racine cubique de 1,909 par excès à moins d'un millième, on aura $x = 1,241$ avec une erreur moindre qu'un millième.

La solution de ces problèmes fait ressortir l'utilité de la *division ordonnée* de Fourrier combinée avec la règle donnée précédemment pour l'extraction des racines par approximation.