LENTHÉRIC

Théorie générale des polaires réciproques planes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 252-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__252_1>

THEORIE GÉNERALE DES POLAIRES RECIPROQUES PLANES

(Voir t. VII, p. 308-409)

PAR M. LENTHÉRIC, NEVEU,
Professeur.

1. On a vu (tome VII, page 352) que la polaire étant

$$(3)\qquad y = mx + n,$$

le pôle était déterminé par les deux équations

$$(5)\qquad m\,F'_y + F'_x = 0$$

$$(6)\qquad F'_y + P = 0,$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$Dy + Ex + 2K = P.$$

Supposons les constantes m et n de la polaire liées entre elles par une relation quelconque

$$\varphi(m, n) = 0;$$

il en résultera un lieu géométrique des pôles dont l'équation s'obtiendrait en éliminant m et n entre la relation

(*) Voir Catalan, Journal de M. Liouville, 1842.

donnée et les équations (5) et (6), qui fixeraient la position particulière du pôle pour chaque système de valeurs de m et n qui satisferait à cette relation.

Les valeurs de m et n, déduites de (5) et (6), ayant même dénominateur, et leurs formes étant linéaires en x et y, le lieu géométrique des pôles serait de même degré en x et y que la relation $\varphi(m, n) = 0$ en m et n.

2. On a vu aussi (tome VII, page 353) que a et b désignant les coordonnées du pôle, l'équation de la polaire est

$$F'_b y + F'_a x + Db + Ea + 2K = 0$$

ou

$$(7) \qquad bF'_y + aF'_x + P = 0.$$

Supposons les coordonnées (a, b) du pôle liées entre elles par une relation quelconque

$$\psi(a, b) = 0,$$

et il résultera de là une courbe enveloppe des positions successives de la polaire, dont on obtiendrait l'équation par la théorie connue.

3. Ces lieux des pôles et ces courbes enveloppes des polaires présentent une foule de cas particuliers, dont l'étude n'offrirait aucune difficulté. Il est possible d'établir, entre les constantes de la polaire et les coordonnées du pôle, des relations telles, que le lieu géométrique des pôles soit identique avec la courbe enveloppe des polaires. Je vais faire voir que cette identité a lieu si la polaire se meut tangentiellement à une courbe quelconque, et si le pôle parcourt la même courbe.

En effet, soit

$$(8) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

une courbe quelconque située sur le plan d'une conique

$$F(x, y) = 0.$$

La tangente à cette courbe en un point (a, b) est

$$\varphi'_b(y-b)+\varphi'_a(x-a)=0.$$

Le pôle de cette tangente s'obtient en faisant, dans (5) et (6),

$$m=-\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b},\quad n=b+a\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b},$$

ce qui identifie la tangente avec la polaire (3); on aura donc, pour déterminer le pôle de la tangente, les deux équations

$$(9)\qquad \frac{\varphi'_a}{\varphi'_b}=\frac{F'_x}{F'_y}$$

et

$$(10)\qquad bF'_y+aF'_x+P=0.$$

Le point (a, b) étant sur la courbe (8), on aura en outre la condition

$$(11)\qquad \varphi(a, b)=0.$$

Le lieu géométrique des pôles des diverses tangentes à la courbe (8) résultera donc de l'élimination de a et de b entre les trois équations (9), (10) et (11).

Maintenant supposons que le pôle parcoure la courbe (8), ce qui donnera la relation

$$(11)\qquad \varphi(a, b)=0;$$

la polaire sera

$$(10)\qquad bF'_y+aF'_x+P=0.$$

Pour avoir la courbe enveloppe des polaires de tous les points de la courbe (8), il faudra, d'après la théorie connue des courbes enveloppes, différentier (11) et (10) par rapport à a et à b, ce qui donne

$$\varphi'_a+\varphi'_b\frac{db}{da}=0,$$

$$F'_y\frac{db}{da}+F'_x=0,$$

et éliminer ensuite a, b et $\frac{db}{da}$ entre les équations (11), (10) et leurs dérivées. Or l'élimination de $\frac{db}{da}$ donne

$$(9) \qquad \frac{\varphi'_a}{\varphi'_b} = \frac{F'_\alpha}{F'_\beta}.$$

Donc la courbe enveloppe des polaires des divers points de la courbe (8) résultera de l'élimination de a et de b entre les trois équations (9), (10) et (11), comme le lieu géométrique des pôles des tangentes de la courbe (8), ce qui établit la parfaite identité des deux lieux.

De là résulte ce beau théorème de M. Poncelet :

Le lieu géométrique des pôles des tangentes d'une courbe quelconque, relativement à une conique, est le même que l'enveloppe des polaires des divers points de cette courbe, relativement à la conique.

Ainsi il existe sur le plan d'une conique une infinité de systèmes de deux courbes telles, que chacune des courbes d'un même système est en même temps et le lieu des pôles des tangentes de l'autre, et l'enveloppe des polaires des divers points de l'autre, relativement à la conique. Les deux courbes d'un même système ont été désignées, par M. Poncelet, sous le nom de *courbes polaires réciproques*, et la conique, qui leur sert d'intermédiaire, sous le nom de *directrice*.

C'est par la propriété connue (tome VII, page 355) que toute droite qui passe par un point a son pôle sur la polaire de ce point, et réciproquement, et en considérant les courbes comme des polygones infinitésimaux, que l'illustre géomètre fut conduit au théorème qui précède, dont il fit la base de l'une des théories les plus curieuses de la géométrie moderne, la *dualité*, que j'exposerai dans la suite.

4. La courbe (8) étant du degré m, la polaire réci-

proque sera au plus du degré $m(m-1)$, car son équation résulte de l'élimination de a et de b entre les trois équations (9), (10) et (11), dont l'une est linéaire en a et b, et les deux autres de degrés m et $m-1$.

D'ailleurs, toutes les tangentes à la courbe (8), issues d'un même point, devant avoir leurs pôles sur la polaire de ce point et sur la courbe polaire réciproque, on voit que le degré de la polaire réciproque doit être égal au nombre de tangentes que l'on pourrait mener à la courbe par un point de son plan. Or on sait qu'à une courbe du degré m on peut mener au plus $m(m-1)$ tangentes.

M. Gergonne a fait voir par l'exemple de la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 = 1,$$

dont la polaire réciproque, par rapport au cercle

$$y^2 + x^2 = r^2,$$

est

$$(r^6 - a^3x^3 - b^3y^3)^2 = 4a^3b^3x^3y^3,$$

que la polaire réciproque d'une courbe du degré m peut, en effet, s'élever au degré $m(m-1)$. La polaire réciproque d'une courbe de degré m n'est donc pas la plus générale de son degré, car sa propre polaire réciproque doit reproduire la courbe du degré m, tandis qu'on serait autorisé à croire qu'elle pourrait donner une courbe du degré $m(m-1)[m(m-1)-1]$. La polaire réciproque perd donc $m^3(m-2)$ tangentes dans le faisceau issu d'un même point. M. le professeur Plucker est le premier, comme le fait observer M. Terquem (tome VII, page 311), qui ait donné une explication complétement satisfaisante de ce fait singulier, sur lequel nous reviendrons.

5. Dans le cas où la courbe

$$(8) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

serait une conique, on aura $m = 2$, et la polaire réciproque serait aussi une conique. Nous pourrions trouver l'équation de cette polaire réciproque en suivant la marche indiquée § 3. C'est celle qui a été suivie par M. Poncelet (*Annales de* Gergonne, tome VIII, page 224). On y parvient plus simplement en suivant la marche indiquée § 1.

Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + K = 0,$$

ou

$$(12) \qquad F(x, y) = 0,$$

l'équation de la conique directrice; et soit

$$ay^2 + bxy - cx^2 + dy + ex + k = 0,$$

ou

$$(13) \qquad f(x, y) = 0,$$

la conique dont on demande la polaire réciproque.

La relation $\varphi(m, n) = 0$, entre les constantes de la polaire représentée par $y = mx + n$, s'obtiendra en remplaçant dans (13) y par $mx + n$, et exprimant que l'équation résultante du deuxième degré en x a ses deux racines égales. On trouvera, réduction faite,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (b^2 - 4ac)n^2 + 2(2ae - bd)mn + (d^2 - 4ak)m^2 \\ + 2(be - 2cd)n + 2(de - 2bk)m + e^2 - 4ck = 0, \end{array} \right.$$

dans laquelle, substituant pour m et n leurs valeurs,

$$m = -\frac{F'_x}{F'_y}, \qquad n = -\frac{p}{F'_y},$$

on aura, pour l'équation de la polaire réciproque de la conique (13),

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} (e^2-4ck)(\mathrm{F}'_y)^2-2(de-2bk)\mathrm{F}'_y\mathrm{F}'_x \\ +(d^2-4ak)(\mathrm{F}'_x)^2-2(be-2cd)p\mathrm{F}'_y \\ -2(bd-2ae)p\mathrm{F}'_x+(b^2-4ac)p^2=0. \end{array}\right.$$

6. Si l'on prenait pour directrice la conique (13), la polaire réciproque de (12) serait représentée par

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{E}^2-4\mathrm{CK})(f'_y)^2-2(\mathrm{DE}-2\mathrm{BK})f'_yf'_x \\ +2(\mathrm{D}^2-4\mathrm{AK})(f'_x)^2-2(\mathrm{BE}-2\mathrm{CD})pf'_y \\ -2(\mathrm{BD}-2\mathrm{AE})pf'_x+(\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC})p^2=0; \end{array}\right.$$

et pour avoir la polaire réciproque de (15) par rapport à (13), il faudrait remplacer dans (16) les dérivées de l'équation (13) par celles de l'équation (15). On obtiendrait ainsi une équation dont les coefficients auraient évidemment, avec ceux de l'équation (16), les mêmes relations que ceux de l'équation (13) avec ceux de l'équation (15), donc cette nouvelle équation serait celle de la polaire réciproque de l'équation (16) par rapport à la directrice (12). De là, ce théorème :

Les polaires réciproques de la directrice, par rapport à deux polaires réciproques, sont elles-mêmes polaires réciproques, par rapport à cette directrice (*).

Nous désignerons ces polaires réciproques de la directrice sous le nom de *polaires réciproques doubles*, et nous ferons connaître quelques propriétés curieuses dont elles jouissent. Pour le moment, nous allons indiquer la discussion complète de l'équation (15), qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, et en évitant de trop longs détails qui ne sauraient trouver place ici.

7. *Cas où la directrice serait une ellipse ou une hyperbole.* On peut toujours choisir les axes de manière

(*) M. Angelo Genocchi, de Turin, nous a adressé une démonstration géométrique de ce théorème.

que la directrice (12) ait pour équation

$$(17)\qquad Ay^2 + Cx^2 + K = 0,$$

la conique étant la courbe (13). Faisant dans (15),

$$F'_y = 2Ay,\quad F'_x = 2Cx,\quad p = 2K,$$

on aura, pour la polaire réciproque de (13),

$$(18)\ \begin{cases} (e^2 - 4ck)A^2y^2 - 2(de - 2bk)ACxy \\ + (d^2 - 4ak)C^2x^2 - 2(be - 2cd)AKy \\ - 2(bd - 2ae)CKx + (b^2 - 4ac)K^2 = 0. \end{cases}$$

L'inspection de cette équation montre que *la directrice n'influe que sur la position de la polaire réciproque* dont la nature ne dépend que de la différence

$$(de - 2bk)^2 - (e^2 - 4ck)(d^2 - 4ak);$$

l'équation (14) fait voir que les valeurs de m qui correspondent à $n = 0$, seront réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires, suivant que cette différence sera positive, nulle ou négative. Mais les valeurs de m qui correspondent à $n = 0$ sont les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener à la conique (13) par l'origine, qui est le centre de la directrice; donc :

La polaire réciproque d'une conique, par rapport à une directrice qui a un centre, sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que le centre de la directrice sera situé en dehors de la conique, sur la conique, ou en dedans.

Cela était, d'ailleurs, facile à prévoir; car toute droite qui passe par le centre de la directrice ayant son pôle à l'infini, la polaire réciproque d'une courbe quelconque doit avoir autant de branches infinies que cette courbe a de tangentes passant par le centre de la directrice. De plus, les points de tangence sont les pôles des éléments de la polaire réciproque situés à l'infini, c'est-à-dire des asymptotes de la polaire réciproque. Ces asymptotes sont donc les polaires des points de contact des tangentes menées à la courbe par le centre de la directrice; et, par suite, les cordes de contact sont les polaires des points d'intersection des asymptotes. Les points d'intersection de la directrice et de la polaire réciproque sont aussi faciles à déterminer, car les polaires de ces points sont tangentes à la directrice en ces points mêmes, et comme elles sont aussi tangentes à la courbe donnée, on voit qu'on les obtiendra en menant des tangentes communes à la courbe et à la directrice.

Ces remarques rendront, surtout dans le cas des coniques, la polaire réciproque trop facile à construire pour qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point.

Si la conique (13) était concentrique à la directrice, son équation se réduirait à la forme

$$(19) \qquad ay^2 + cx^2 + k = 0,$$

et l'on trouverait la polaire réciproque, en faisant dans (18),

$$b = 0, \quad d = 0, \quad e = 0,$$

ce qui donnerait

$$(20) \qquad ck\,A^2y^2 + ak\,C^2x^2 + acK^2 = 0.$$

Vérifions sur les équations (17), (19) et (20) le théorème du § 6 sur les polaires réciproques doubles.

En prenant (17) pour conique, sa polaire réciproque, par rapport à une directrice quelconque, serait, d'après l'équation (15),

$$CK(F'_y)^2 + AK(F'_x)^2 + AC\,P^2 = 0.$$

Si (19) est la directrice, on a

$$F'_y = 2ay, \quad F'_x = 2cx, \quad P = 2k,$$

et pour la polaire réciproque de (17)

$$(21) \qquad a^2CKy^2 + c^2AKx^2 + k^2AC = 0,$$

si (20) est la directrice,

$$F'_y = 2ck\,A^2_y, \quad F'_x = 2ak\,C^2_x, \quad P = 2ac\,K^2,$$

et la polaire réciproque de (17), par rapport à cette directrice, est

$$(22) \qquad c^2k^2A^3y^2 + a^2k^2C^3x^2 + a^2c^2K^3 = 0.$$

Or on trouve que (21) et (22) sont polaires réciproques, en prenant pour directrice la conique (17).

L'équation (20) montre que la polaire réciproque de (19) sera toujours de même nature que cette conique. Pour que la conique et sa polaire réciproque fussent semblables, on devrait avoir

$$\frac{cA^2}{a} = \frac{aC^2}{c}$$

ou

$$\frac{A}{a} = \frac{C}{c};$$

mais alors la conique serait semblable à sa directrice.

Si la directrice était une ellipse

$$Ay^2 + Cx^2 - K = 0,$$

et la conique une hyperbole ayant les mêmes axes

$$Ay^2 - Cx^2 + K = 0,$$

on trouverait, pour la polaire réciproque, l'hyperbole elle-même. De même, en prenant l'hyperbole pour directrice, on trouverait que l'ellipse est à elle-même sa polaire réciproque.

On verrait de même que deux hyperboles conjuguées sont telles, que chacune est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à l'autre.

Si la conique (13) était une parabole, on aurait

$$b^2 - 4ac = 0,$$

et l'équation (18) fait voir que la polaire réciproque passerait par le centre de la directrice; ce qui était facile à prévoir, car la conique aurait deux de ses éléments situés à l'infini. Si la parabole avait le même axe que la directrice, on aurait, de plus,

$$b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0,$$

et l'équation (18) se réduirait à

$$e^2A^2y^2 - 4akC^2x^2 + 4aeCKx = 0,$$

équation d'une ellipse ou d'une hyperbole, suivant que a et k seront de signes contraires ou de mêmes signes, c'est-à-dire suivant que l'origine ou le centre de la directrice sera intérieur ou non à la parabole, comme on devait s'y attendre.

Si, de plus, le sommet de la parabole était à l'origine, la polaire réciproque serait

$$eA^2y^2 + 4aCKx = 0,$$

équation d'une parabole de même sommet et de même axe que la proposée. Si la directrice était une ellipse, C et K étant de signes contraires, les deux paraboles seraient opposées par le sommet; si la directrice était une hyperbole, les deux paraboles seraient opposées par le sommet ou non, suivant que l'axe transverse de l'hyperbole coinciderait avec celui de la parabole ou lui serait perpendiculaire.

8. *Cas où la directrice serait un cercle.* Soit

$$y^2 + x^2 = r$$

l'équation de ce cercle; en faisant dans (18)

$$A = 1, \quad C = 1, \quad K = -r^2,$$

on aura, pour la polaire réciproque d'une conique quelconque par rapport à ce cercle,

$$(e^2 - 4ck)y^2 - 2(de - bk)xy + (d^2 - 4ak)x^2$$
$$+ 2r^2(be - 2cd)y + 2r^2(bd - 2ae)x + (b^2 - 4ac)r^4 = 0,$$

si la conique est un autre cercle quelconque

$$y^2 + x^2 + dy + ex + k = 0.$$

En faisant, dans l'équation précédente,

$$a = c = 1 \quad \text{et} \quad b = 0,$$

on aura, pour la polaire réciproque,

$$\begin{gathered}(e^2 - 4k)y^2 - 2dexy + (d^2 - 4k)x^2 \\ - 4r^2dy - 4r^2ex - 4r^4 = 0,\end{gathered}$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$(d^2 + e^2 - 4k)(y^2 + x^2) - (dy + ex + 2r^2)^2 = 0;$$

ce qui montre que la polaire réciproque est une conique ayant pour foyer l'origine ou le centre du cercle directeur, et pour directrice la droite

$$dy + ex + 2r^2 = 0,$$

c'est-à-dire la polaire du centre du second cercle par rapport au premier.

Donc, *la polaire d'un cercle, par rapport à un autre cercle, est une conique ayant pour foyer le centre du cercle directeur, et pour directrice la polaire du centre de l'autre cercle.*

9. *Cas où la directrice serait une parabole.* On peut toujours choisir les axes de manière que l'équation de la directrice soit

$$(23) \qquad Ay^2 + Ex = 0;$$

d'après l'équation (18), l'équation d'une conique, par rapport à cette directrice, sera

$$(24) \qquad \left\{\begin{aligned} &4(e^2 - 4ck)A^2y^2 - 4(be - 2cd)AExy \\ &+ (b^2 - 4ac)E^2x^2 - 4(de - 2bk)AEy \\ &- 2(bd - 2ae)E^2x + (d^2 - 4ak)E^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

La nature de la polaire réciproque ne dépend que de la différence

$$(be - 2cd)^2 - (b^2 - 4ac)(e^2 - 4ck).$$

Or, en faisant $m = 0$ dans la relation (14), on trouvera:

pour déterminer les coefficients linéaires des tangentes de la conique parallèle à l'axe de la parabole, l'équation du deuxième degré

$$(b^2 - 4ac)q^2 + 2(be - 2cd)q + e^2 - 4ch = 0,$$

et, suivant que la différence ci-dessus sera positive, nulle ou négative, la conique aura deux tangentes parallèles à l'axe de la parabole, ou n'en aura qu'une, ou n'en aura pas. Dans le premier cas, la polaire réciproque (24) sera une hyperbole; dans le deuxième, une parabole; et, dans le troisième, une ellipse: conclusions faciles à prévoir en considérant la parabole comme une conique ayant son centre à l'infini.

Si l'on avait $b^2 - 4ac = 0$, la polaire réciproque serait une hyperbole, à moins qu'on n'eût aussi $be - 2cd = 0$, ce qui arriverait pour $b = 0$ et $c = 0$, c'est-à-dire si la conique avait son axe parallèle à celui de la directrice. Si les axes étaient les mêmes, on aurait, de plus, $d = 0$, et l'équation de la polaire réciproque deviendrait

$$(25)\qquad e^2A^2y^2 + aeE^2x - ahE^2 = 0;$$

et, en supposant de plus $h = 0$, ce qui donnerait aux deux paraboles le même sommet, la polaire réciproque serait

$$eA^2y^2 + aE^2x = 0,$$

ce qui montre que, dans le cas de deux paraboles,

$$Ay^2 + Ex = 0,$$
$$Ay^2 - Ex = 0,$$

opposées par le sommet, chacune d'elles serait à elle-même sa polaire réciproque par rapport à l'autre.

10. *Cas des coniques confocales.* En prenant pour origine le foyer de la conique, son équation sera

$$(26)\qquad y^2 + x^2 - (my + nx + q)^2 = 0$$

ou

$$(1 - m^2)y^2 - 2mnxy + (1 - n^2)x^2 - 2mqy - 2nqx - q^2 = 0;$$

et, d'après l'équation (15), pour avoir la polaire réciproque par rapport à une directrice quelconque, il faudra remplacer a, b, c, etc., par leurs valeurs, ce qui donnera

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} & q^2(F'_y)^2 + q^2(F'_x)^2 - 2mqpF'_y - 2nqpF'_x \\ & + (m^2 + n^2 - 1)p^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

et, si la conique (26) était une parabole, à cause de

$$m^2 + n^2 - 1 = 0,$$

$$(28)\qquad q(F'_y)^2 + q(F'_x)^2 - 2mpF'_y - 2npF'_x = 0.$$

Dans le cas où la directrice serait un cercle

$$y^2 + x^2 = r^2$$

ayant pour centre le foyer de la conique, on aurait

$$F'_y = 2y, \quad F'_x = 2x, \quad p = -2r^2,$$

et la polaire réciproque de la conique (26) serait

$$(29)\quad q^2y^2 + q^2x^2 + 2mqr^2y + 2nqr^2x + (m^2 + n^2 - 1)r^4 = 0.$$

On voit que cette polaire réciproque serait un cercle, quelle que soit la conique. Dans le cas de la parabole, $m^2 + n^2 - 1 = 0$, et le cercle passerait par l'origine ou par le foyer de la parabole.

Les coordonnées du centre de ce cercle (29) sont

$$\alpha = -\frac{nr^2}{q}, \quad \beta = -\frac{mr^2}{q},$$

et la polaire de ce point, par rapport au cercle directeur, est

$$\beta y + \alpha x - r^2 = 0,$$

ou, substituant les valeurs de α et de β,

$$my + mx + q = 0,$$

c'est-à-dire l'équation de la directrice de la conique; d'ou résulte ce théorème au moyen duquel une foule de problèmes sur les coniques se ramènent à des problèmes sur les cercles :

La polaire réciproque d'une conique, par rapport à un cercle confocal, est un second cercle qui aurait pour centre le pôle de la directrice de la conique, par rapport au cercle confocal.

On déduirait facilement des équations (26) et (29) que, dans le cas de deux coniques de même foyer et de même directrice, la polaire réciproque serait aussi de même foyer et de même directrice.