Question d'examen sur les diviseurs fractionnaires en arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 246-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__246_1>

QUESTION D'EXAMEN. SUR LES DIVISEURS FRACTIONNAIRES EN ARITHMÉTIQUE (*).

1. *Définition.* a, b, c, d étant quatre nombres entiers, si $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{c}{d}$ donne pour quotient un nombre entier, alors $\frac{c}{d}$ est dit *diviseur* de $\frac{a}{b}$; ainsi $\frac{ad}{bc}$ doit être un nombre entier.

Observation. C'est une généralisation de la définition ordinaire.

2. Problème *Quelle relation doit exister entre $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$ pour que ces quantités aient $\frac{c}{d}$ pour diviseur commun?*

Solution. On doit avoir $ad = bcz$, $a_1d = b_1cz_1$, z et z_1 étant des nombres entiers; et de là $ab_1z_1 = a_1bz$. Soit D le plus grand commun diviseur de ab_1 et a_1b; faisons $ab_1 = \mathrm{D}p$, $a_1b = \mathrm{D}q$. Nous aurons $pz_1 = qz$; et comme p et q sont premiers entre eux, l'on doit avoir

(*) M. J. Bertrand examinateur.

$z = mp$, $z_1 = mq$, où m est un nombre entier quelconque : on déduit de là

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{bz} = \frac{a}{bmp} = \frac{a\mathrm{D}}{bm\mathrm{D}p} = \frac{\mathrm{D}}{mbb_1}.$$

3. Problème. *Quel est le plus grand commun diviseur des quantités* $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$?

Solution. Conservant la même notation, le plus grand commun diviseur répond évidemment à la valeur de m égale à l'unité; donc ce plus grand commun diviseur est $\frac{\mathrm{D}}{bb_1}$; alors $z = p$ et $z_1 = q$. z et z_1 sont donc premiers entre eux; ce qui est évident par la définition du plus grand commun diviseur.

4. Problème. *Étant données les quantités* $\frac{a}{b}$ et $\frac{a_1}{b_1}$, *trouver des nombres entiers* z *et* z_1 *tels, que l'on ait*

$$\frac{a}{bz} = \frac{a_1}{b_1 z_1}.$$

Solution. La même que celle du problème 2; car l'on a

$$ab_1 z_1 = a_1 bz.$$

Observation. Dans les examens, le problème est ainsi énoncé : Un rectangle a ses deux dimensions $\frac{a}{b}$, $\frac{a_1}{b_1}$ exprimées en mètres; il faut diviser le contour en parties égales, de manière que chaque dimension contienne un nombre entier de ces parties.

5. Probleme général. *Résoudre les équations*

$$\frac{a_1}{b_1 z_1} = \frac{a_2}{b_2 z_2} = \frac{a}{b\ z} = \cdots = \frac{a_n}{b_n z_n},$$

où a_p, b_p *sont des entiers donnés, et* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *des entiers à trouver.*

Solution. *Voir* les *Fractions équivalentes* de M. Lebesgue, p. 81.

Remarque. Nous nous sommes servis de l'algorithme algébrique, parce que ces considérations sont à l'usage des personnes qui connaissent cet algorithme; il est d'ailleurs facile de traduire les formules en *phrases,* et d'employer ce qu'on peut appeler *le genre verbeux*. Comme il peut se trouver des examinateurs qui aiment ce genre, j'engage les candidats à s'y exercer, par précaution, en cette occasion et en d'autres.

Exemple. Une demi-ligne d'écriture algorithmique suffit pour démontrer que, dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Une telle abréviation sera souvent repoussée avec colère. Remplacez cette demi-ligne par un flux de paroles, et vous serez bien accueilli. *Historique.*