

TILLOT

Question d'examen sur les racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 148-149

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__148_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS (*);

PAR M. TILLOT,

Professeur de mathématiques à Castres.

Théorème. $\varphi(x) = 0$ étant une équation algébrique de degré n et ayant n racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ inégales, on a

$$(1) \quad \frac{1}{\varphi'(x_1)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)} + \dots + \frac{1}{\varphi'(x_n)} = 0.$$

Démonstration. On a l'identité connue

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{1}{\varphi'(x_1)(x-x_1)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)(x-x_2)} + \dots + \frac{1}{\varphi'(x_n)(x-x_n)};$$

d'où

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{x}\right)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{1}{\varphi'(x_1)\left(1 - \frac{x_1}{x}\right)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)} + \dots + \frac{1}{\varphi'(x_n)\left(1 - \frac{x_n}{x}\right)}.$$

Faisant $x = \infty$, on obtient la relation (1).

Vérification. Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$; la relation indiquée devient

$$\frac{1}{3x_1^2 + p} + \frac{1}{3x_2^2 + p} + \frac{1}{3x_3^2 + p} = 0,$$

ou, en ôtant le dénominateur commun,

$$3p^2 + 6p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 9(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) = 0.$$

Or, par la théorie des fonctions symétriques, le coeffi-

(*) MM. Bertrand et Hermite examinateurs.

cient de $6p$ est $-2p$, le multiplicateur de 9 est p^2 ; donc la relation devient

$$3p^2 - 12p' + 9p'' = 0.$$

Interprétation géométrique. Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe parabolique de degré n , les axes étant rectangulaires. Si par les n points (réels ou imaginaires) où la courbe est rencontrée par l'axe des abscisses on mène les n tangentes (réelles ou imaginaires), la somme des cotangentes des angles que font ces n droites avec l'axe des x est nulle.

Nota. Ce théorème est un cas particulier du théorème d'Euler qui sert de fondement à la décomposition des fractions rationnelles (voir t. IV, p. 295, et t. VI, p. 127), théorème auquel l'illustre Jacobi a donné une si belle généralisation (t. VII, p. 114), et qui donne lieu à un théorème de géométrie que nous consignerons ailleurs.