

LEBESGUE

Sur l'hexagramme mystique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 139-142

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__139_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'HEXAGRAMME MYSTIQUE

(Voir t. III, p. 304),

PAR M. LEBESGUE.

Cette proposition de Pascal ou de Desargues, suivant M. Gergonne, est bien nommée en ce sens qu'elle est en quelque sorte la figure, ou plutôt la représentation géométrique exacte de l'équation d'une conique qui passe par cinq points fixes. Cette proposition doit donc renfermer toute la théorie des sections coniques, puisque cette théorie n'est qu'un développement des propriétés de l'équation générale des courbes algébriques du second degré.

Avant de démontrer ce que j'avance ici, ce qui d'ailleurs l'a été en d'autres termes, je donnerai, d'après MM. Steiner et Plucker, l'énoncé complet des propriétés de l'hexagone mystique.

« Six points pris arbitrairement sur le périmètre d'une
» conique quelconque sont les sommets de soixante hexa-
» gones inscrits, et les points de contact de soixante hexa-
» gones circonscrits (CARNOT, *Géométrie de position*).
» lesquels jouissent des propriétés suivantes.

« 1°. Dans chacun des hexagones	« 1°. Dans chacun des hexagones
» inscrits, les points de concours des	» circonscrits, les droites qui joi-
» directions des côtes opposés ap-	» gnent les sommets opposés con-
» partiennent tous les trois à une	» courent toujours par trois dans
» même droite (D) (Pascal), de	» un même point (P) (Brianchon),
» sorte qu'on obtient ainsi soixante	» de sorte qu'on obtient ainsi
» droites D.	» soixante points P.
» 2°. Ces soixante droites D con-	» 2°. Ces soixante points P ap-
» courent trois à trois dans un	» partiennent trois à trois à une
» même point p , de sorte qu'on ob-	» même droite d , de sorte qu'on
» tient ainsi vingt points p .	» obtient ainsi vingt droites d .
» 3°. Ces vingt points p appartienn-	» 3°. Ces vingt droites d concou-
» rent à quinze droites δ dont cha-	» rent dans quinze points ϖ , par
» cune en contient quatre, de sorte	» chacun desquels en passent qua-
» que par chacun des vingt points p ,	» tre, de sorte que chacune des vingt
» passent trois des quatre droi-	» droites d contient trois des quinze
» tes δ .	» points ϖ .

(Journal de M. CRELLE, tome XXXIV, page 338.)

Il suffira de démontrer ici la proposition de Pascal, les autres serviront d'exercices. On peut d'ailleurs consulter les Mémoires de M. Plucker indiqués à l'endroit cité.

L'équation la plus générale des courbes du deuxième degré ou des coniques renferme six coefficients, dont un pourrait être réduit à l'unité; il suit de là qu'en se donnant cinq points de la conique, on aura cinq équations du premier degré pour déterminer les coefficients.

Dans le chapitre IV de son Introduction, Euler prend pour coordonnées des cinq points,

$$\begin{aligned} x &= 0, & x &= a, & x &= 0, & x &= c, & x &= c, \\ y &= 0, & y &= 0, & y &= b, & y &= d, & y &= f. \end{aligned}$$

L'équation de la courbe cherchée

$$(A) \quad Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

est entièrement déterminée en posant

$$B \begin{cases} A = ce[f(a-c) - d(a-e)], & D = -bA, \\ B = cf(a-c) - b-f - de(a-c) - b-d), & E = -ac, \\ C = df[c - b-f - c(b-d)], & F = 0. \end{cases}$$

Il existe donc toujours une conique et une seule passant par les cinq points donnés (on suppose que trois points ne sont pas en ligne droite).

Si l'on met dans (A) les valeurs des coefficients (B), l'équation pourra prendre diverses formes, parmi lesquelles on distinguera la suivante :

$$(C) \quad \begin{cases} X(y-f)(dx-cy) + Y(x-c)(ey-fx) \\ \quad = (dx-cy)(ey-fx). \end{cases}$$

La comparaison donnerait les valeurs de X et Y, mais il est plus simple de les calculer directement ainsi qu'il suit : L'équation (C) du deuxième degré en x, y coordonnées d'un point variable de la courbe est évidemment satisfaite par $x=0, y=0$; $x=c, y=d$; $x=e, y=f$. Ainsi la conique (e) passe par (c) des cinq points; si on exprime qu'elle passe par les deux autres, en posant successivement $x=0, y=b$; $x=a, y=0$, on trouvera deux équations qui sont précisément celles des droites passant par les points (0, 0), (c, d), (0, b), (e, f). Pour fixer les idées, nous numérotions ainsi qu'il suit les cinq points fixes et le point variable :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (0, 0), & (a, 0), & (c, d), & (x, y), & (e, f), & (0, b); \end{array}$$

l'hexagone sera 123456. On voit donc que X et Y sont les coordonnées du point de rencontre des côtés opposés (2, 3), (5, 6).

D'autre part, l'équation

$$(D) \quad \frac{X}{P} + \frac{Y}{Q} = 1$$

représente une droite coupant l'axe des x à une distance P de l'origine, et l'axe des y à une distance Q de la même

origine. Or l'équation (C) prend la forme (D), si l'on pose

$$P = \frac{ey - fx}{y - f}, \quad Q = \frac{dx - cy}{x - c};$$

comme $y = 0$, $x = P$ sont les coordonnées de l'intersection des côtés opposés (1, 2), (4, 5), de même $x = 0$, $y = Q$ sont celles de l'intersection des côtés opposés (1, 6), (3, 4).

L'équation (C) ou l'équation (D) exprimera donc que les trois points d'intersection des côtés opposés sont en ligne droite. C'est là une des propriétés principales de l'hexagone mystique; c'est, comme l'on voit, l'interprétation géométrique de l'équation (C).

On aurait pu remplacer l'équation (C) par l'équation

$$\begin{aligned} X(y - d)(ey - fx) + Y(x - c)(dx - cy) \\ = (dx - cy)(fx - cy), \end{aligned}$$

et l'on aurait obtenu semblablement un théorème analogue qui donne, ainsi que le précédent, un moyen facile de construire par points et avec la règle, seulement les coniques qui passent par cinq points donnés.
