

TERQUEM

Théorèmes d'homogénéité

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 113-120

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__113_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__113_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES D'HOMOGENÉITÉ.

I. M. Otto Hesse, professeur à Königsberg, a eu l'ingénieuse idée de représenter les coordonnées d'un point sur un plan, non pas par x et y , mais par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; de même un point dans l'espace par $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$; z et u sont des dénominateurs quelconques. Pour exprimer qu'un point a pour coordonnées $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, on écrit (x', y', z') ; ces conventions établissent dans les formules une symétrie qui n'existe pas dans les conventions usitées, et rendant *homogènes* les équations descriptives des lignes, permettent de leur appliquer les propriétés des fonctions homogènes.

II. *Exemple.* 1°. L'équation ordinaire d'une droite est $ay + bx + c = 0$; si l'on remplace y et x par $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$,

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \chi(\lambda) &= \lambda - \lambda^5 + 10 \cdot \frac{\lambda^9}{2!} - 15 \cdot 14 \cdot \frac{\lambda^{13}}{3!} - 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \frac{\lambda^{17}}{4!} - \dots, \\
 &= \sqrt[5]{\lambda - \sqrt[5]{\lambda} - \dots}
 \end{aligned}$$

elle devient $ay + bx + cz = 0$, homogène en x, y, z .

2°. L'équation ordinaire d'une droite passant par deux points est $y(x' - x'') + x(y'' - y') + y'x'' - x'y'' = 0$; remplaçant y, x, y', x', y'', x'' par $\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, \frac{y'}{z}, \frac{x'}{z}, \frac{y''}{z}, \frac{x''}{z}$, on obtient

$$x(y'z'') + y(z'x'') + z(x'y'') = 0, \text{ homogène et symétrique.}$$

Les quantités entre parenthèses sont des binômes alternés ou des *déterminants* à deux éléments.

3°. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une ligne; l'équation ordinaire de la tangente est $yD_{y'} + xD_{x'} - y'D_{y'} - x'D_{x'} = 0$, où $D_{y'}$ représente ce que devient la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à y , quand on remplace x et y par x', y' coordonnées du point de contact. Remplaçant donc, dans l'équation $F(x, y) = 0$, x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, elle devient $\varphi(x, y, z) = 0$, homogène en x, y, z ; et l'équation de la tangente prend la forme symétrique $xD_{x'} + yD_{y'} + zD_{z'} = 0$: $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ sont les coordonnées du point de contact; $D_{x'}$ est la dérivée de φ par rapport à x , etc. Ainsi, l'équation rendue homogène d'une conique est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dyx + Exy + Fz^2 = 0;$$

l'équation de la tangente est

$$x[2Cx' + By' + Ez'] + y[2Ay' + Bx' + Dz'] + z[2Fz' + Dy' + Ex'] = 0.$$

4°. Soit $Ax + By + Cz + Du = 0$ l'équation homogène d'un plan; celle d'un plan passant par trois points donnés est

$$x(y'z''u''') + y(z'u''x''') + z(u'x''y''') + u(x'y''z''') = 0.$$

Dans cette équation, les quantités entre parenthèses sont des *déterminants* à trois éléments. On sait qu'on ap-

pelle aujourd'hui *déterminants* à n éléments, les dénominateurs communs aux n inconnues de n équations du premier degré, les coefficients étant tous représentés par des lettres.

5°. $F(xyzu) = 0$ étant l'équation homogène d'une surface, l'équation du plan tangent est

$$xD_{x'} + yD_{y'} + zD_{z'} + uD_{u'} = 0;$$

$D_{x'}$ est la dérivée de F par rapport à x , dans laquelle les coordonnées variables sont remplacées par les coordonnées du point de contact.

III. *Lemme.* Étant données n équations littérales, homogènes du premier degré à n inconnues et de cette forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, le *déterminant* est nul, de degré n , et chaque coefficient est du premier degré dans chaque terme.

Démonstration. On a n équations entre les $n - 1$ rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$; donc, etc.

IV. *Théorème fondamental.* Soit

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_n = 0$$

un système de n équations *homogènes, littérales* entre les n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$; F_1 est du degré p_1 , F_2 du degré $p_2, \dots, F_n$ du degré p_n . Soit $p_1 p_2 p_3 \dots p_n = P$. En éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de F_1 montent dans chaque terme au degré $\frac{P}{p_1}$, les coefficients de F_2 au degré $\frac{P}{p_2}$, etc.; conséquemment le degré de l'équation est $P \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)$.

Démonstration. On peut éliminer entre ces n équations les $n - 1$ rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots$, et l'on parvient ainsi

à une équation nécessairement homogène entre les coefficients, équation désignée sous le nom de *résultante*. Concevons la fonction F_1 décomposée en p_1 facteurs de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, de même F_2 en p_2 de ces facteurs, et ainsi des autres. Prenons un facteur de F_1 , un deuxième de F_2 , un troisième de F_3 , etc.; les égalant à zéro, on aura n équations du premier degré, homogènes entre n inconnues. D'après le lemme III, on aura un déterminant nul de degré n , dans lequel chaque coefficient entre au premier degré: on obtient ainsi P déterminants; le produit de ces P déterminants est identique avec la *résultante*. Pour fixer les idées, soit $p_1 = 3$, de sorte que

$$F = Ax_1^3 + Bx_1^2 x_2 + \dots,$$

et

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n) (b_1 x_1 + \dots b_n x_n) (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n);$$

il est évident que dans le produit des P déterminants, a_1 entrera à la puissance $\frac{P}{p_1}$, de même b_1 et c_1 ; donc $a_1 b_1 c_1$

ou A ne peut entrer qu'à la puissance $\frac{P}{p_1}$, et on démontre de même qu'en général les termes de la résultante sont de degré $\frac{P}{p_n}$ par rapport au coefficient de F_1 , et ainsi des autres; donc, etc.

Nota. Ce théorème important est énoncé sans démonstration dans un Mémoire de M. Cayley (CRELLE, t. XXXIV, p. 90; 1846).

V. PROBLÈME. *Trouver l'équation du système de droites tirées d'un point donné, dans le plan de deux courbes aux points d'intersection.*

Solution. Soient

$$\begin{aligned} (1) \quad & F(x, y, z) = 0, \\ (2) \quad & f(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

les équations données des deux courbes planes F est du degré n , et f du degré m ; x', y', z' sont les coordonnées du point donné, et x'', y'', z'' les coordonnées d'un point quelconque pris sur une de ces droites : l'équation de cette droite est donc

$$x[y'z''] + y[z'x''] + z[x'y''] = 0.$$

Éliminant x, y, z entre cette équation et les équations (1) et (2), on obtient, d'après le théorème fondamental, une équation homogène θ de degré mn par rapport à $[y'z'']$, $[z'x'']$, $[x'y'']$; cette équation peut se décomposer en mn facteurs linéaires par rapport à z'', x'', y'' , et dont les coefficients sont des fonctions irrationnelles de x', y', z' . Chaque facteur égalé à zéro appartient à une des droites en question : donc l'équation représente le système de ces lignes; de sorte que x'', y'', z'' sont les coordonnées courantes de ces droites.

VI. *Trouver l'équation du système des tangentes menées d'un point donné dans le plan d'une courbe à cette courbe.*

1^{re} Solution. Même notation; $F(x, y, z) = 0$, équation de la courbe de degré n . Si l'on élimine x, y, z entre les trois équations

$$(1) \quad F = 0,$$

$$(2) \quad x' \frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + z' \frac{dF}{dz} = 0,$$

$$(3) \quad x[y'z''] + y[z'x''] + z[x'y''] = 0,$$

le résultat est une fonction homogène de degré $n(n-1)$ par rapport à $[y'z'']$, $[z'x'']$, $[x'y'']$; car l'équation (1) est de degré n , l'équation (2) de degré $n-1$, et cette fonction est de l'ordre n par rapport à x', y', z' . Les coefficients de F se trouvant dans l'équation (1) et dans l'équation (2), ils sont donc dans chaque terme du degré n

et du degré $n - 1$, c'est-à-dire du degré $2n - 1$; mais l'équation résultante, d'après sa nature, renferme un facteur rationnel linéaire par rapport aux coefficients de F , et qu'on obtient en remplaçant dans $F = 0$, x, y, z par x', y', z' , car on a l'identité

$$x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} = nF = 0.$$

Otant donc ce facteur, la résultante n'est plus que du degré $2(n - 1)$ par rapport aux coefficients de F : c'est ce qu'on nomme la *résultante réduite*.

Observation. Faisons $X = [y'z'']$, $Y = [z'x'']$ et $Z = [x'y'']$; substituant dans la résultante réduite, on obtient une équation de degré $n(n - 1)$ par rapport à X, Y, Z , et qui n'est autre que celle de la polaire réciproque de $F = 0$ par rapport à la conique $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; l'équation (2) est celle d'une droite tangente à la courbe $F = 0$. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle relativement à la conique, on a

$$n = k = k' = 0, \quad l = l' = -4, \quad m = -4,$$

$$d = \frac{dU}{dy}, \quad e = \frac{dF}{dx}, \quad f = \frac{dF}{dz};$$

donc

$$x_1 = e, \quad y_1 = d, \quad z_1 = f \text{ (t. II, p. 305),}$$

d'où

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

Ainsi X, Y, Z sont les coordonnées du pôle de la tangente.

2^e Solution. x'', y'', z'' étant sur la tangente, on a

$$(4) \quad x'' \frac{dF}{dx} + y'' \frac{dF}{dy} + z'' \frac{dF}{dz} = 0,$$

et cette équation peut tenir lieu de l'équation (3); ainsi, d'après le théorème fondamental, la *résultante* est de

l'ordre $n(n-1)$ par rapport à x', y', z' , et de même par rapport à x'', y'', z'' . Et quant aux coefficients de F, qui se trouvent aussi dans l'équation F, ils sont de l'ordre $(n-1)^2 + n(n-1) + n(n-1) = (n-1)(3n-1)$; mais on a vu ci-dessus que la résultante est de l'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de F : il doit donc se trouver ici un facteur à ôter de l'ordre

$$(n-1)(3n-1) - 2(n-1) = 3(n-1)^2.$$

En effet, on trouve ce facteur en posant

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0;$$

ces valeurs satisfont aux équations (1), (2), (4); car

$$x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} = nF,$$

et la résultante de ces équations est de l'ordre $3(n-1)^2$ par rapport aux coefficients de F.

3^e Solution. L'équation (3) est satisfaite en y remplaçant x, y, z , soit par x', y', z' , soit par x'', y'', z'' ; donc on y satisfait en écrivant $x = sx' + tx''$, $y = sy' + ty''$, $z = sz' + tz''$; s et t étant des quantités quelconques. L'équation $F = 0$ peut être remplacée par celle-ci :

$$(5) \quad x'' \frac{dF}{dx} + y'' \frac{dF}{dy} + z'' \frac{dF}{dz} = 0;$$

de sorte que nous avons le système des trois équations (2), (3), (5). Représentons par (F) ce que devient F en y remplaçant x, y, z par les valeurs en s et t ; nous aurons

$$\frac{d(F)}{ds} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{ds} = x' \frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + z' \frac{dF}{dz}.$$

Donc l'équation

$$(6) \quad \frac{d(F)}{ds} = 0$$

peut remplacer l'équation (2); de même l'équation

$$(7) \quad \frac{d(F)}{dt} = 0$$

tient lieu de l'équation (5). Éliminant s et t entre ces deux équations, on obtient l'équation résultante. Soit $Mx^p y^q$ un terme de F et $p + q = n$, ce terme devient $M(lx' + mx'')^p (lx' + mx'')^q$; prenant la dérivée par rapport à l , on obtient $pM(lx' + mx'')^{p-1} [lx' + mx'']^q$, et encore deux autres termes analogues: celui-ci fournit le terme $pl^{p-1+q} [Mx'^{p+q}]$: ainsi cette équation résultante est de degré $n - 1$ par rapport à l . Il en est de même en prenant la dérivée par rapport à m ; donc les coefficients sont de degré $2(n - 1)$ dans la résultante, c'est-à-dire le coefficient (M) de F sont de degré $2(n - 1)$, et les quantités $x', y', z', x'', y'', z''$ sont de degré $2n(n - 1)$, ou, ce qui revient au même, les binômes $[x'y'']$, $[x'z'']$, $[y'z'']$ sont de degré $n(n - 1)$. De là ce théorème :

L'équation du système de tangentes menées du point donné (x', y', z') à la courbe $F = 0$ se trouve en éliminant s, t entre les équations $\frac{d[F]}{ds} = 0$, $\frac{d(F)}{dt} = 0$, $[F]$ étant ce que devient F par les substitutions

$$x = sx' + tx'', \quad y = sy' + ty'', \quad z = sz' + tz''.$$

L'équation résultante est une fonction de degré $n(n - 1)$ par rapport aux binômes alternés $[x'y'']$, $[y'z'']$, $[z'x'']$, et représentant ces termes par x, y, z , on obtient l'équation de la polaire réciproque de la résultante par rapport à la conique $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.