NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes d'homogénéité

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 113-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__113_1>

THÉORÈMES D'HOMOGÉNÉITÉ.

I. M. Otto Hesse, professeur à Kœnigsberg, a eu l'ingénieuse idée de représenter les coordonnées d'un point sur un plan, non pas par x et y, mais par $\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}$; de même un point dans l'espace par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$; z et u sont des dénominateurs quelconques. Pour exprimer qu'un point a pour coordonnées $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$, on écrit (x', y', z'); ces conventions établissent dans les formules une symétrie qui n'existe pas dans les conventions usitées, et rendant *homogènes* les équations descriptives des lignes, permettent de leur appliquer les propriétés des fonctions homogènes.

II. *Exemple*. 1°. L'équation ordinaire d'une droite est $ay + bx + c = 0$; si l'on remplace y et x par $\frac{y}{z}, \frac{x}{z}$,

(*) $\chi(\lambda) = \lambda - \lambda^5 + 10 . \frac{\lambda^9}{2!} - 15.14 . \frac{\lambda^{13}}{3!} - 20.19.18 \frac{\lambda^{17}}{4!} - \ldots,$

$= \sqrt[5]{\lambda - \sqrt[5]{\lambda - \ldots}}$

elle devient $ay + bx + cz = 0$, homogène en x, y, z.

2°. L'équation ordinaire d'une droite passant par deux points est $y(x' - x'') + x(y'' - y') + y'x'' - x'y'' = 0$; remplaçant y, x, y', x', y'', x'' par $\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, \frac{y'}{z'}, \frac{x'}{z'}, \frac{y''}{z''}, \frac{x''}{z''}$, on obtient

$$x(y'z'') + y(z'x'') + z(x'y'') = 0, \text{ homogène et symétrique.}$$

Les quantités entre parenthèses sont des binômes alternés ou des *déterminants* à deux éléments.

3°. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une ligne; l'équation ordinaire de la tangente est $yD_{y'} + xD_{x'} - y'D_{y'} - x'D_{x'} = 0$, où $D_{y'}$ représente ce que devient la dérivée de $F(x, y)$ par rapport à y, quand on remplace x et y par x', y' coordonnées du point de contact. Remplaçant donc, dans l'équation $F(x, y) = 0$, x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, elle devient $\varphi(x, y, z) = 0$, homogène en x, y, z; et l'équation de la tangente prend la forme symétrique $xD_{x'} + yD_{y'} + zD_{z'} = 0$: $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ sont les coordonnées du point de contact; $D_{x'}$ est la dérivée de φ par rapport à x, etc. Ainsi, l'équation rendue homogène d'une conique est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dyx + Exy + Fz^2 = 0;$$

l'équation de la tangente est

$$x[2Cx' + By' + Ez'] + y[2Ay' + Bx' + Dz'] \\ + z[2Fz' + Dy' + Ex'] = 0.$$

4°. Soit $Ax + By + Cz + Du = 0$ l'équation homogène d'un plan; celle d'un plan passant par trois points donnés est

$$x(y'z''u''') + y(z'u''x''') + z(u'x''y''') + u(x'y''z''') = 0.$$

Dans cette équation, les quantités entre parenthèses sont des *déterminants* à trois éléments. On sait qu'on appelle aujourd'hui *déterminants* à n éléments, les dénominateurs communs aux n inconnues de n équations du premier degré, les coefficients étant tous représentés par des lettres.

5°. $F(xyzu) = 0$ étant l'équation homogène d'une surface, l'équation du plan tangent est

$$xD_{x'} + yD_{y'} + zD_{z'} + uD_{u'} = 0\,;$$

$D_{x'}$ est la dérivée de F par rapport à x, dans laquelle les coordonnées variables sont remplacées par les coordonnées du point de contact.

III. *Lemme*. Étant données n équations littérales, homogènes du premier degré à n inconnues et de cette forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$, le *déterminant* est nul, de degré n, et chaque coefficient est du premier degré dans chaque terme.

Démonstration. On a n équations entre les $n-1$ rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$; donc, etc.

IV. *Théorème fondamental*. Soit

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0, \ldots, F_n = 0$$

un système de n équations *homogènes, littérales* entre les n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$; F_1 est du degré p_1, F_2 du degré $p_2, \ldots, F_n$ du degré p_n. Soit $p_1p_2p_3\ldots p_n = P$. En éliminant les inconnues, on parvient à une équation homogène entre les coefficients. Les coefficients de F_1 montent dans chaque terme au degré $\frac{P}{p_1}$, les coefficients de F_2 au degré $\frac{P}{p_2}$, etc.; conséquemment le degré de l'équation est $P\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right)$.

Démonstration. On peut éliminer entre ces n équations les $n-1$ rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots$, et l'on parvient ainsi à une équation nécessairement homogène entre les coefficients, équation désignée sous le nom de *résultante*. Concevons la fonction F_1 décomposée en p_1 facteurs de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, de même F_2 en p_2 de ces facteurs, et ainsi des autres. Prenons un facteur de F_1, un deuxième de F_2, un troisième de F_3, etc.; les égalant à zéro, on aura n équations du premier degré, homogènes entre n inconnues. D'après le lemme III, on aura un déterminant nul de degré n, dans lequel chaque coefficient entre au premier degré : on obtient ainsi P déterminants; le produit de ces P déterminants est identique avec la *résultante*. Pour fixer les idées, soit $p_1 = 3$, de sorte que

$$F = Ax_1^3 + Bx_1^2 x_2 + \ldots,$$

et

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n)\,(b_1 x_1 + \ldots b_n x_n)\,(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n);$$

il est évident que dans le produit des P déterminants, a_1 entrera à la puissance $\frac{P}{p_1}$, de même b_1 et c_1; donc $a_1 b_1 c_1$ ou A ne peut entrer qu'à la puissance $\frac{P}{p_1}$, et on démontre de même qu'en général les termes de la résultante sont de degré $\frac{P}{p_n}$ par rapport au coefficient de F_1, et ainsi des autres; donc, etc.

Nota. Ce théorème important est énoncé sans démonstration dans un Mémoire de M. Cayley (CRELLE, t. XXXIV, p. 90; 1846).

V. PROBLÈME. *Trouver l'équation du système de droites tirées d'un point donné, dans le plan de deux courbes aux points d'intersection.*

Solution. Soient

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

les équations données des deux courbes planes F est du degré n, et f du degré m; x', y', z' sont les coordonnées du point donné, et x'', y'', z'' les coordonnées d'un point quelconque pris sur une de ces droites : l'équation de cette droite est donc

$$x[y'z''] + y[z'x''] + z[x'y''] = 0.$$

Éliminant x, y, z entre cette équation et les équations (1) et (2), on obtient, d'après le théorème fondamental, une équation homogène θ de degré mn par rapport à $[y'z'']$, $[z'x'']$, $[x'y'']$; cette équation peut se décomposer en mn facteurs linéaires par rapport à z'', x'', y'', et dont les coefficients sont des fonctions irrationnelles de x', y', z'. Chaque facteur égalé à zéro appartient à une des droites en question : donc l'équation représente le système de ces lignes; de sorte que x'', y'', z'' sont les coordonnées courantes de ces droites.

VI. *Trouver l'équation du système des tangentes menées d'un point donné dans le plan d'une courbe à cette courbe.*

1re *Solution.* Même notation ; $F(x, y, z) = 0$, équation de la courbe de degré n. Si l'on élimine x, y, z entre les trois équations

$$(1) \qquad F = 0,$$

$$(2) \qquad x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz} = 0,$$

$$(3) \qquad x[y'z''] + y[z'y''] + z[x'y''] = 0,$$

le résultat est une fonction homogène de degré $n(n-1)$ par rapport à $[y'z'']$, $[z'y'']$, $[x'y'']$; car l'équation (1) est de degré n, l'équation (2) de degré $n-1$, et cette fonction est de l'ordre n par rapport à x', y', z'. Les coefficients de F se trouvant dans l'équation (1) et dans l'équation (2), ils sont donc dans chaque terme du degré n

et du degré $n-1$, c'est-à-dire du degré $2n-1$; mais l'équation résultante, d'après sa nature, renferme un facteur rationnel linéaire par rapport aux coefficients de F, et qu'on obtient en remplaçant dans $F=0$, x, y, z par x', y' z', car on a l'identité

$$x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}=nF=0.$$

Otant donc ce facteur, la résultante n'est plus que du dégré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de F : c'est ce qu'on nomme la *résultante réduite.*

Observation. Faisons $X=[y'z'']$, $Y=[z'x'']$ et $Z=[x'y'']$; substituant dans la résultante réduite, on obtient une équation de degré $n(n-1)$ par rapport à X, Y, Z, et qui n'est autre que celle de la polaire réciproque de $F=0$ par rapport à la conique $x^2+y^2+z^2=0$; l'équation (2) est celle d'une droite tangente à la courbe $F=0$. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle relativement à la conique, on a

$$n=k=k'=0,\quad l=l'=-4,\quad m=-4,$$
$$d=\frac{dU}{dy},\quad e=\frac{dF}{dx},\quad f=\frac{dF}{dz};$$

donc

$$x_1=e,\quad y_1=d,\quad z_1=f \text{ (t. II, p. 305)},$$

d'où

$$xx_1+yy_1+zz_1=0.$$

Ainsi X, Y, Z sont les coordonnées du pôle de la tangente.

2^e *Solution.* x'', y'', z'' étant sur la tangente, on a

$$(4)\qquad x''\frac{dF}{dx}+y''\frac{dF}{dy}+z''\frac{dF}{dz}=0,$$

et cette équation peut tenir lieu de l'équation (3); ainsi, d'après le théorème fondamental, la *résultante* est de l'ordre $n(n-1)$ par rapport à x', y', z', et de même par rapport à x'', y'', z''. Et quant aux coefficients de F, qui se trouvent aussi dans l'équation F, ils sont de l'ordre $(n-1)^2 + n(n-1) + n(n-1) = (n-1)(3n-1)$; mais on a vu ci-dessus que la résultante est de l'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de F : il doit donc se trouver ici un facteur à ôter de l'ordre

$$(n-1)(3n-1) - 2(n-1) = 3(n-1)^2.$$

En effet, on trouve ce facteur en posant

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0;$$

ces valeurs satisfont aux équations (1), (2), (4); car

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} = nF,$$

et la *résultante* de ces équations est de l'ordre $3(n-1)^2$ par rapport aux coefficients de F.

3ᵉ *Solution*. L'équation (3) est satisfaite en y remplaçant x, y, z, soit par x', y', z', soit par x'', y'', z''; donc on y satisfait en écrivant $x = sx' + tx''$, $y = sy' + ty''$, $z = sz' + tz''$; s et t étant des quantités quelconques. L'équation $F = 0$ peut être remplacée par celle-ci :

$$(5) \qquad x''\frac{dF}{dx} + y''\frac{dF}{dy} + z''\frac{dF}{dz} = 0;$$

de sorte que nous avons le système des trois équations (2), (3), (5). Représentons par (F) ce que devient F en y remplaçant x, y, z par les valeurs en s et t; nous aurons

$$\frac{d(F)}{ds} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds} = x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz}.$$

Donc l'équation

$$(6) \qquad \frac{d(F)}{ds} = 0$$

peut remplacer l'équation (2); de même l'équation

$$\frac{d(\mathrm{F})}{dt} = 0 \tag{7}$$

tient lieu de l'équation (5). Éliminant s et t entre ces deux équations, on obtient l'équation résultante. Soit $\mathrm{M}x^p y^q$ un terme de F et $p + q = n$, ce terme devient $\mathrm{M}(lx' + mx'')^p\ (lx' + mx'')^q$; prenant la dérivée par rapport à l, on obtient $p\mathrm{M}(lx' + mx'')^{p-1}\ [lx' + mx'']^q$, et encore deux autres termes analogues: celui-ci fournit le terme $pl^{p-1+q}\,[\mathrm{M}x'^{p+q}]$: ainsi cette équation résultante est de degré $n - 1$ par rapport à l. Il en est de même en prenant la dérivée par rapport à m; donc les coefficients sont de degré $2(n - 1)$ dans la résultante, c'est-à-dire le coefficient (M) de F sont de degré $2(n - 1)$, et les quantités $x', y', z', x'', y'', z''$ sont de degré $2n(n - 1)$, ou, ce qui revient au même, les binômes $[x'y'']$, $[x'z'']$, $[y'z'']$ sont de degré $n(n - 1)$. De là ce théorème :

L'équation du système de tangentes menées du point donné (x', y', z') à la courbe $\mathrm{F} = 0$ se trouve en éliminant s, t entre les équations $\frac{d[\mathrm{F}]}{ds} = 0$, $\frac{d(\mathrm{F})}{dt} = 0$, $[\mathrm{F}]$ étant ce que devient F par les substitutions

$$x = sx' + tx'',\quad y = sy' + ty'',\quad z = sz' + tz''.$$

L'équation résultante est une fonction de degré $n(n - 1)$ par rapport aux binômes alternés $[x'y'']$, $[y'z'']$, $[z'x'']$, et représentant ces termes par x, y, z, on obtient l'équation de la polaire réciproque de la résultante par rapport à la conique $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.