

Cubature d'un polyèdre à faces trapèzes. D'après M. C. Koppe, à Soest

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 108-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__108_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CUBATURE D'UN POLYÈDRE A FACES TRAPÈZES,

D'APRÈS M. C. KOPPE, à Soest.

(Crelle, t. XVIII, p. 275, 1838.)

I. *Lemme.* L'aire d'un polygone est la somme de termes dont chacun est le demi-produit de deux côtés du polygone par le sinus de l'angle qu'ils comprennent (voir tome VII, page 348).

II. *THÉOREME.* *Un corps ayant pour bases deux polygones parallèles, et pour faces des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour hauteur la distance des deux polygones, et pour base l'aire de la section parallèle faite à égale distance des deux bases, augmentée de la douzième partie de l'aire d'un polygone qui a les mêmes angles que les polygones, et qui a pour côtés les différences de leurs côtés homologues.*

Démonstration. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les côtés successifs du polygone supérieur, et $b_1, b_2, \dots, b_n$ les côtés correspondants de la base inférieure: a_1 et b_1, a_2 et b_2 , etc..

sont parallèles. Soit h l'intervalle des bases. Désignons par $(a_p a_q)$ l'angle de deux côtés a_p, a_q ; on a $(a_p a_q) = (b_p b_q)$. A une distance x de la base supérieure, faisons une section parallèle aux bases, et soient $z_1, z_2, \dots, z_4$ les côtés correspondants à $a_1, a_2, \dots, a_4$; on aura

$$(z_p z_q) = (a_p a_q)$$

et

$$z_p = a_p - (a_p - b_p) \frac{x}{h}, \quad z_q = a_q - (a_q - b_q) \frac{x}{h}.$$

A, B désignant les aires respectives des bases, et Z l'aire de la section, on a, d'après le lemme,

$$A = \frac{1}{2} \Sigma_4 a_p a_q \sin (a_p a_q),$$

$$B = \frac{1}{2} \Sigma_4 b_p b_q \sin (a_p a_q),$$

$$Z = \frac{1}{2} \Sigma_4 z_p z_q \sin (a_p a_q),$$

ou mettant les valeurs de $z_p z_q$, il vient

$$Z = \frac{1}{2} \Sigma \left[\begin{aligned} & a_p a_q - (2 a_p a_q - a_p b_q - a_q b_p) \frac{x}{h} \\ & + (a_p - b_p) (a_q - b_q) \frac{x^2}{h^2} \end{aligned} \right] \sin a_p a_q.$$

V désignant le volume des corps, on a

$$V = \int_0^h Z dx = \frac{1}{12} h \Sigma (2 a_p a_q + a_p b_q + 2 b_p b_q) \sin a_p a_q.$$

Soit V' le volume du prisme qui a pour hauteur h et pour base la section parallèle passant par le milieu de h ; on a

$$V' = \frac{1}{8} h \Sigma (a_p + a_q) (b_p + b_q) \sin a_p a_q,$$

$$V - V' = \frac{1}{24} h \Sigma (a_p - b_p) (a_q - b_q) \sin a_p a_q;$$

or cette différence est la douzième partie d'un prisme ayant pour hauteur h et pour base un polygone équiangle aux bases, et dont les côtés sont $a - b, a_p - b_p$ et $a_q - b_q$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRES. 1°. Cône tronqué à bases circulaires. Soient h la hauteur d'un cône tronqué, r et ρ les rayons des bases; on aura

$$V = \pi h \left[\left(\frac{r + \rho}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} (\rho - r)^2 \right].$$

2°. *Cône tronqué elliptique.* Soient h la hauteur, a_1, a_2 les demi-axes principaux d'une base, b_1, b_2 les demi-axes principaux de l'autre base; on aura

$$V = \pi h \left[\frac{a_1 + b_1}{2} \cdot \frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{1}{12} (a_1 - b_1) (a_2 - b_2) \right].$$

3°. *Hexaèdre trapézoïde.* Les bases étant aussi des trapèzes, soient a_1, a_2 les côtés parallèles d'une base et c leur distance, b_1, b_2 les côtés parallèles de l'autre base et d l'intervalle; on aura

$$V = h \left[\frac{a_1 + b_1 + a_2 + b_2}{2} \cdot \frac{c + d}{2} + \frac{1}{12} (a_1 - b_1 + a_2 - b_2) \frac{c - d}{2} \right].$$
