

PAUL SERRET

Solution de la question 156

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 98-99

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__98_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 156 (1847, p. 394).

PAR M. PAUL SERRET.

(Lycée Monge, classe de M. VINCENT.)

—

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3} \quad (\text{W. Roberts}).$$

Démonstration. L'équation polaire de la lemniscate de Bernoulli est $\rho = a \cdot \cos^{\frac{1}{2}} 2\omega$.

Soit P la projection orthogonale du centre O de la courbe sur la tangente au point M.

Soit OX l'axe polaire, et posons $OM = f'$; $MOX = \omega'$; $OP = f$; $POX = \omega$.

Appelons α l'angle PMO; on sait que l'on aura :

$$\text{tang } \alpha = - \frac{\rho'}{\text{dérivée de } \rho'}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \rho' &= a \sqrt{\cos 2\omega} = a \sqrt{1 - 2\sin^2 \omega'}; \quad D. \rho' = \frac{-4a^2 \sin \omega' \cdot \cos \omega'}{2a \sqrt{\cos 2\omega'}} = \\ &= - \frac{a \sin 2\omega'}{\sqrt{\cos 2\omega'}}; \end{aligned}$$

on aura donc :

$$\text{tang } \alpha = \frac{\cos 2\omega'}{\sin 2\omega'} = \frac{1}{\text{tang } 2\omega'}.$$

D'où il suit que l'angle α est le complément de l'angle $2\omega'$;

mais l'angle α est aussi le complément de l'angle POM ,

donc ang. POM = $2\omega'$; et de plus $\omega' = \frac{1}{3}\omega$.

Or le triangle rectangle POM donne

$$\rho = \rho' \cdot \cos \text{POM} = \rho' \cos \frac{2}{3}\omega ; \quad \rho' = a \sqrt{\cos \frac{2\omega}{3}} ;$$

on a donc

$$\rho = a \cos^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\omega , \text{ ou bien } \rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \frac{2\omega}{3} \text{ pour l'équation}$$

du lieu cherché, c. q. f. d.