NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES ORSEL

Grand concours

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 455-458

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__455_0>

GRAND CONCOURS.

Mathématiques élémentaires.

(Fig. 49). Soient donnés dans le plan d'un cercle deux droites parallèles L et L′. Par un point M pris sur l'une, on mène deux tangentes au cercle qui déterminent sur l'autre un segment AB ; on joint le point M au point I, milieu de ce segment, et l'on demande de démontrer que toutes les droites, telles que MI, vont concourir en un même point.

PAR M. JULES ORSEL,
Ne le 2 août 1830, à Paris,
elève interne du lycee Monge, classe de M. Bigourdan.

Synthèse. Il faut démontrer que les droites telles que MI, remplissant les conditions de l'énoncé, passent toujours par un point fixe. Soit le cercle *o* placé en dehors des deux droites, je prends des points tels que M, M′, sur LL qui est la parallèle la plus éloignée de la circonférence donnée; je joins les points D et C, où les lignes MD, MC sont tangentes à la circonférence; DC sera la polaire du point M par rapport au cercle *o* : c'est-à-dire, qu'une sécante M M′ sera divisée harmoniquement au point M et au point où elle rencontrera DC, par rapport aux points H et H′ (théorème 1 ci-après). Je fais la même construction pour le point M′ que pour le point M; je joins D′ à C′; D′C′ sera la polaire du point M′; même construction pour M″, etc. Mais M, M′, M″ étant en ligne droite, les lignes DC, D′C′ doivent passer par un même point qui est le pôle de la ligne LL (théorème 2). Joignons M P, je dis que cette ligne passera par le milieu du segment AB, c'est-à-dire par le point I. Si nous prolongeons DC jusqu'à sa rencontre avec LL au point N, la ligne NC sera divisée harmoniquement aux points N, D, P, C puisque P est le pôle de LL par rapport au cercle *o*; MN, MD, MP, MC est un système harmonique; et AB étant parallèle à LL il s'ensuit que AB est partagée en deux parties égales par la droite MP (théorème 3), c'est-à-dire, que MP passe par le point I milieu de AB. *c. q. f. d.*

Analyse. Supposons le problème résolu puisque AB est parallèle à ML et que AI = IB; ML, MD, MP, MC, sera un système harmonique, et si l'on mène la ligne CD, cette ligne prolongée sera divisée harmoniquement, aux points N, D, P, C (ceci est évident d'après le théorème 3).

Mais DC ligne polaire de M par rapport au cercle *o* (théorème 1), passe par le pôle de LL (théorème 2), où NDPC est divisée harmoniquement; ce pôle n'est donc autre chose que le point P où MI rencontre DC. On peut faire le même raisonnement pour tous les points de LL; donc toutes les lignes telles que MI, M′I′ passent par le point P polaire de LL.

Théorème (1). (Fig. 50.) Soit KOM tel que

$$KM : MH :: KP : PH,$$

si j'élève au point P une perpendiculaire ce sera le lieu demandé, car la circonférence O étant le lieu des points dont la distance aux points P et M est proportionnelle à HM:HP, on a successivement

$$PF : FM :: PH : HM :: PE : EM,$$

d'où $$FM : EM :: PF : PE.$$

Mais IP perpendiculaire à KM, est bissectrice de FPE;

donc $$PF : PE :: FI : IE,$$

donc $$FM : ME :: FI : IE,$$

mais si MF se rapproche de D, le rapport continue à avoir lieu; F′, I′, E′, se rapprochant sans cesse, à la limite ils se confondront en D, et DPC sera la polaire.

Théorème 2. (Fig. 51.) Si DC est la polaire de M, MM′ perpendiculaire sur OM est la polaire de P; car menons NPIM′, on démontrera presque comme dans le théorème (1)

que $\qquad NM':IM'::NP:PI;$

en effet $\qquad NP:NM::PH:HM,$

$$PI:IM::PH:HM;$$

$$NP:NM::PI:IM,$$

et par suite $\qquad NM':IM'::NP:PI.$

Théorème 3. (Fig. 52.) Par le point I je mène une ligne quelconque. Dans les triangles semblables MHG et BIG,

on a $\qquad MH:BI::HG:IG,$

dans les triangles semblables KHM et KIA;

on a $\qquad MH:IA::HK:KI;$

mais $\qquad BI = IA;$

donc $\qquad HG:IG::KH:KI.$

La réciproque est presque semblable.

$$HG:IG::HK:KI,$$

d'où l'on tire $\qquad MH:BI::MH:IA.$

Discussion. (1er cas.) Je supposerai que le cercle roule peu à peu vers les deux droites (Fig. 53).

Quand le cercle sera tangent ou coupera la ligne L′L′, le problème restera toujours le même; car on aura toujours le faisceau harmonique MM′, MD, MP, MC. Seulement le segment AB et le point I peuvent quelquefois coïncider avec DC et P ou se trouver au delà.

Si la circonférence se trouve au milieu des deux lignes (Fig. 54), il n'y a encore rien de remarquable et le point P se trouve entre M et I.

(2ᵉ cas). Supposons que la circonférence donnée soit tangente à la ligne LL, il n'y a pas alors de solutions (Fig. 55).

Le segment AB devient infini, car le point A est situé à l'infini.

Si on prenait le point M' le segment aurait ses deux points chacun à l'infini.

(3ᵉ cas). Si le cercle coupe la ligne LL', le problème est impossible si le point est pris dans l'intérieur du cercle, (Fig. 56.)

S'il est à l'extérieur, la construction n'est pas en défaut, seulement le point P n'est plus à l'intérieur du cercle. Du reste la démonstration est identique.

4ᵉ cas. (Fig. 57.) Si la circonférence est tout à fait extérieure, à LL on retombe presque dans le 1ᵉʳ cas, on le démontrerait aussi directement. Seulement il est plus simple de mener par le point AI une parallèle à AB, et l'on a

$$A_1I_1 : AI :: I_1B_1 : IB;$$

et la démonstration est identique à la première.