

Considérations sur les racines des équations algébriques, d'après M. Minding de Berlin

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7 (1848), p. 443-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__443_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

sur les racines des équations algébriques.

1. *Définition et notation.* — Soit une fonction d'une variable $F(x)$; si dans le développement de cette fonction on remplace x par Fx , on obtient un second développement qu'on écrit $FF(x)$, ou bien $F_2(x)$; si dans ce second développement on remplace encore x par Fx , on obtient $FFF(x)$, ou $F_3(x)$; c'est ce qu'on nomme des *fonctions répétées*.

2. Théorème. — Dans une équation algébrique dont les racines sont des grandeurs quelconques *indépendantes* les unes des autres, toutes les racines sont des fonctions *répétées* de l'une quelconque d'entre elles.

Démonstration. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des grandeurs indépendantes qu'on peut considérer comme racines de l'équation $X = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots \approx 0$; ensuite α étant une racine primitive de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$; posons :

$$\begin{aligned} nt_1 &= x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n, \\ nt_2 &= x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^4 x_4 + \dots + \alpha^{n-2} x_n, \\ . &. \\ nt_\mu &= x_\mu + \alpha^\mu x_{\mu+1} + \alpha^{2\mu} x_{\mu+2} + \dots + \alpha^{n-\mu} x_n. \end{aligned}$$

On en déduit, en faisant $\beta = \alpha^{-1}$,

$$x_1 = \frac{a}{n} + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1},$$

$$x^2 = \frac{a}{n} + \beta t_1 + \beta^2 t_2 + \dots + \beta^{n-1} t_{n-1},$$

.....

$$x_{\mu+1} = \frac{a}{n} + \beta^\mu t_1 + \beta^{2\mu} t_2 + \dots + \beta^{n-\mu} t_{n-1}.$$

Faisons $t_i^n = p$; il est évident que p dépend d'une équation de degré 1.2.3..... n , nombre de permutations entre les racines; mais les permutations *cycliques* donnent les mêmes valeurs pour t_i^n , par exemple en changeant 1 en 2, 2 en 3.....et n en 1; t_i devient αt_i ; donc l'équation en p est la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une polynôme de degré

$$1.2.3 \dots n - 1 = m;$$

les coefficients sont des fonctions entières de a, b, c , etc., et cette équation peut encore être réduite, comme le fait voir Lagrange dans la célèbre note XIII (*Résolution des équations numériques*). Faisons $v_\mu = n^{-\mu+1} t_\mu t_1^{-\mu}$, et formons l'expression

$$v_\mu = n t_\mu (n t_1)^{-\mu} = (x_\mu + \alpha^\mu x_2 + \alpha^{2\mu} x_3 + \dots + \alpha^{n-\mu} x_n) (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n)^{-\mu};$$

v_μ montera aussi au degré m . Donc, d'après la méthode de Lagrange, on peut exprimer v_μ rationnellement en p (v. t. I, Hermite) et l'on peut toujours faire disparaître p du dénominateur; l'on a :

$$v_\mu = A + Bp + Cp^2 + \dots + Mp^{m-1};$$

A, B, C sont des fonctions rationnelles de a, b, c , et l'équation $v_\mu = n^{-\mu+1} t_\mu t_1^{-\mu}$ donne $t_\mu = n^{\mu-1} v_\mu t_1^\mu$; les expressions des racines de ci-dessus deviennent :

$$x_i = \frac{a}{n} + t_i + n v_2 t_i^2 + n^2 v_3 t_i^3 + \dots + n^{n-2} v_{n-1} t_i^{n-1} = f(t_i),$$

$$x_2 = \frac{a}{n} + \beta t_1 + n\alpha_2 \beta^2 t_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} \beta^{n-1} t_1^{n-1} = f(\beta t_1),$$

etc.

$$\text{ou } x_1 = f(t_1), \quad x_2 = f(\beta t_1), \quad x_3 = f(\beta^2 t_1) \dots x_n = f(\beta^{n-1} t_1)$$

et x_i est une fonction rationnelle de degré $n - 1$ en t , et de degré $m - 1$ en p .

Les équations $t^n - p = 0$ et $f(t) - x_i = 0$ ont en commun la racine t_i , et pas d'autres. En effet, toutes les racines de la première de ces équations sont de la forme $\beta_\mu t_i$, μ étant un nombre entier compris entre 0 et n ; donc si la racine $\beta_\mu t_i$ appartenait aussi à la seconde de ces équations, on aurait $f(\beta_\mu t_i) - x_i = 0$ ou $x_{\mu+1} = x_i$; l'équation donnée aurait donc des racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse; cherchant donc le diviseur commun aux deux polynômes $t^n - p$ et $f(t) - x_i$, on trouve $t_i = \psi(x_i)$, où ψ est une fonction entière de degré $n - 1$ en x_i , et les coefficients sont des polynômes en p de degré $m - 1$; les coefficients de ces polynômes étant des fonctions rationnelles de a, b, c , etc.

De $x_1 = f(t_1)$, on a déduit $t_1 = \psi(x_1)$; et comme $x_2 = f(\beta t_1)$, on en déduira $\beta t_1 = \psi(x_2)$; de même $\beta^2 t_1 = \psi(x_3) \dots \beta^{n-1} t_1 = \psi(x_n)$, d'où $x_2 = f(\beta \psi x_1)$, $x_3 = f(\beta^2 \psi x_1)$, $x_4 = f(\beta^3 \psi x_1)$, etc.

Faisant $f(\beta \psi(x_\mu)) = F(x_\mu)$, on aura :

$$x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F(x_2) \dots x_n = F(x_{n-1}), \quad x_1 = F(x_n),$$

ou $x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F_2(x_1) \dots x_n = F_{n-1}(x_1); \quad x_1 = F_n(x_1), \text{ C.Q.F.D.}$

Application. Soit l'équation $x^3 - 3bx - 2c = 0$,

$$3t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3; \quad t^3 = p,$$

il faut former l'équation

$$\left(p - \frac{(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3}{27} \right) \left(p - \frac{(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha x_3)^3}{27} \right) = 0;$$

on a :

$$\Sigma x_i^3 = +6c; \quad \Sigma x_i^2 x_j = -6c, \quad (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3) \\ = \Sigma x_i^2 + 3b = -3b; \quad \Sigma x_i^2 = 6b,$$

d'où $p^2 - 2cp + b^2 = 0,$

on a $x_2 = 3t_1(3t_1)^{-1} = \frac{t_2 t_1}{t_1^3} = \frac{b}{3p};$

d'où $x_1 = t + \frac{b}{p} t^2 = f(t); x_2 = f(\beta t),$

$$x_3 = f(\beta^2 t), px = pt + bt^2, ptx = p t^3 + bp.$$

Éliminant t^3 , il vient :

$$t = \frac{px_1 + b^2}{p + bx_1};$$

on a $bx_1^2 = bt^3 + \frac{b^3 t}{p} + 2b^2,$

$$\frac{b^3 t}{p} = t(2c - p); \text{ donc } bx_1^2 = bt^3 + t(2c - p) + 2b^2,$$

$$bx_1^2 - px_1 = 2t(c - p) + 2b^2; \quad t = \frac{b^2 + \frac{1}{2}(px_1 - bx_1^2)}{p - c};$$

$$x_2 = \beta t + \frac{b}{p} \beta^2 t^2 = \beta t + \beta^2 (x_1 - t) = (\beta - \beta^2) t + \beta^2 x_1;$$

$$p = c + \frac{1}{\sqrt{c^2 - b^3}}; \quad \beta^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad \beta - \beta^2 = \sqrt{-3};$$

$$t = \frac{b^2 + \frac{1}{2}cx_1 - \frac{1}{2}bx_1^2}{\sqrt{c^2 - b^3}} + \frac{1}{2}x_1;$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{c^2 - b^3}} \left[b^2 + \frac{1}{2}cx_1 - \frac{1}{2}bx_1^2 \right] - \frac{1}{2}x_1 = F(x_1);$$

$$x_3 = F(x_2) = F_2(x_1); \quad x_1 = F_1(x_1).$$

Ainsi connaissant une racine, on peut par son moyen, calculer de suite les deux autres. On peut toujours supposer que x est réel; dans ce cas les deux autres racines sont réelles ou imaginaires, selon qu'on a $c^2 < b^3$ ou $c^2 > b^3$; lorsque $c^2 = b^3$, l'équation a deux racines égales et la formule n'est plus applicable et dans ce cas le facteur :

$$b^2 + \frac{1}{2}cx_1 - \frac{1}{2}bx_1^2$$

se réduit aussi à zéro ; car $x_1 = -\sqrt[3]{b}$ ce qu'on sait par la méthode ordinaire.

2° x_1 étant une racine , on trouve pour les deux autres racines , par la méthode connue :

$$x = \frac{-x_1 \pm \sqrt{12b - 3x_1^2}}{2},$$

comparant les deux expressions, il vient :

$$2b^2 + cx_1 - bx_1^2 = \sqrt{(c^2 - b^3)(4b - x_1^2)},$$

ainsi pour x , réel , la quantité sous le radical est positive ; lorsque $c^2 > b^3$, il n'y a qu'une racine réelle $< 2\sqrt[3]{b}$ et lorsque $c^2 < b^3$, les trois racines sont chacune $> 2\sqrt[3]{b}$.

Historique. Cette manière remarquable de présenter les racines de l'équation cubique est due à M. le professeur Hill (Crelle, IX, p. 100). M. Minding a amplifié la proposition et démontré que dans toutes les équations algébriques, toutes les racines peuvent être mises sous une forme *cyclique*, qu'on peut mettre en évidence pour les équations de deuxième , troisième et quatrième degré ; possibilité virtuelle pour les degrés supérieurs ; car, l'exécution dépend de la résolution d'équations qui dépassent le quatrième degré et dont l'impossibilité a été établie par Abel.
