

Questions d'examen sur des lieux géométriques polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 437-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__437_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN

sur des lieux géométriques polaires.

—

I. Notation. Nous désignons par P_r la fonction homogène de deux variables x, y de degré r , et par Q_r la fonction homogène trigonométrique de degré r suivante :

$$A \sin^r \varphi + B \sin^{r-1} \varphi \cos \varphi + C \sin^{r-2} \varphi \cos^2 \varphi + \dots R \sin^2 \varphi \cos^{r-2} \varphi \\ + S \sin \varphi \cos^{r-1} \varphi + T \cos^r \varphi,$$

où $A, B, C, \dots R, S, T$ sont des constantes données.

II. Soit $P_m + P_{m-1} + P_{m-2} + \dots P_2 + P_1 + P_0 = 0$ (1)
l'équation d'une ligne plane de degré m , axes rectangulaires ; prenant l'origine pour pôle et l'axe des x pour axe polaire, l'équation polaire de la courbe est

$$z^m Q_m + z^{m-1} Q_{m-1} + z^{m-2} Q_{m-2} + \dots z^2 Q_2 + z Q_1 + P_0 = 0 \quad (2).$$

III. *Problème.* Par un point fixe donné dans le plan d'une courbe de degré m , on mène une sécante qui la rencontre en m points ; sur cette sécante, on prend un point tel que sa distance au point fixe soit égale à la somme des distances de l'origine aux points d'intersection ; trouver le lieu de ce point.

Solution. Prenons le point fixe pour origine et les axes rectangulaires ; soient (1) et (2) l'équation aux coordonnées rectangulaires et l'équation polaire de la courbe ; pour la même valeur φ , la somme de toutes les valeurs de z est $-\frac{Q_{m-1}}{Q_m}$; donc l'équation polaire de la courbe cherchée est

$$z = \frac{-Q_{m-1}}{Q_m}, \text{ ou bien } z = \frac{-z \cdot z^{m-1} Q_{m-1}}{z^m Q_m} = \frac{-z P_{m-1}}{P_m} ;$$

d'où $P_m + P_{m-1} = 0$, équation aux coordonnées rectangulaires.

IV. *Problème.* Mêmes données ; trouver un point tel que le carré de sa distance à l'origine soit égal à la somme des carrés des distances de l'origine aux m points d'intersection.

Solution. On a

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{Q_{m-1}^2 - 2Q_m Q_{m-2}}{Q_m^2} = \frac{z^2 \cdot [z^{2m-2} Q_{m-1}^2 - 2z^{2m-2} Q_m Q_{m-2}]}{z^{2m} Q_m^2} \\ &= \frac{z^2 [P_{m-1}^2 - 2P_m P_{m-2}]}{P_m^2}, \end{aligned}$$

d'où $P_m^2 + 2P_m P_{m-2} - P_{m-1}^2 = 0$.

V. *Problème.* Mêmes données ; trouver un point tel que sa distance réciproque à l'origine soit égale à la somme des distances réciproques des points d'intersection à l'origine.

Solution. Dans l'équation (2) remplaçons z par $\frac{1}{z}$, on obtient

$$P_0 z^m + Q_1 z^{m-1} + Q_2 z^{m-2} + \dots + Q_m = 0 ;$$

donc

$$\frac{1}{z} = \frac{-Q_1}{P_0}; \quad z = \frac{-P_0}{Q_1};$$

d'où $P_1 + P_0 = 0$, équation d'une droite.

VI. Problème. Mêmes données; trouver un point tel que le carré de sa distance réciproque à l'origine soit égale à la somme des carrés des distances réciproques des points d'intersection à l'origine.

Solution. On a

$$\frac{1}{z^2} = \frac{Q_1^2 - 2P_0Q_2}{P_0^2}; \quad z^2[Q_1^2 - 2P_0Q_2] = P_0^2 \text{ ou } P_1^2 - 2P_0P_2 - P_0^2 = 0,$$

équation d'une conique.

VII. Même procédé pour d'autres questions de ce genre et qui s'applique facilement aux surfaces.