

TERQUEM

**Discussion d'une surface du 4ème degré,
donnant une valeur approchée du radical
 $\sqrt{x^2 + y^2}$, d'après M. Poncelet**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 39-42

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__39_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISCUSSION

d'une surface du 4^{ème} degré, donnant une valeur approchée du radical $\sqrt{x^2+y^2}$, d'après M. Poncelet (Crelle , t. XIII, p. 277. 1835, en français).

I. Soit $(z+1)^2 (x^2+y^2) - (ax+by)^2=0$ l'équation d'une surface du quatrième degré.

1° Faisant $x=y=0$, on a $z=\frac{0}{0}$; donc l'axe des z est sur la surface;

2° Tout plan parallèle au plan xy rencontre la surface suivant deux droites, qui se coupent sur l'axe des z ; donc la surface est engendrée par une droite qui se meut suivant

une certaine loi le long de l'axe des z , parallèlement au plan xy ;

$$3^{\circ} \text{ On a } \frac{y}{x} = \frac{ab \pm (z+1) \sqrt{a^2 + b^2 - (1+z)^2}}{(z+1)^2 - b^2} = \tan \varphi.$$

Ainsi, à une même valeur de z répondent deux valeurs de φ , qui donnent deux droites conjuguées. Les deux se réunissent en une seule, lorsque $z = -1$; alors $\tan \varphi = -\frac{a}{b}$;

et lorsque $z = -1 \pm \sqrt{a^2 + b^2}$, alors $\tan \varphi' = \frac{b}{a}$; prises positivement, ces deux dernières valeurs de z sont des maximums;

4° On a $z = -1 \pm (a \cos \varphi + b \sin \varphi)$; lorsque $\varphi = 0$, $z' = -1 \pm a$; si l'on veut que z et z' soient conjugués, l'on doit poser

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = a, \text{ d'où } \frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot \frac{1}{2} \varphi$$

ainsi $\tan \varphi' < \tan \varphi$; $\varphi' < \varphi$;

5° a et b diminuant, z' et z'' augmentent négativement, et par conséquent diminuent étant pris positivement, la plus grande diminution ayant lieu lorsque ces valeurs atteignent le maximum Z ; on doit donc poser

$$1 - a = 1 - a \cos \varphi - b \sin \varphi = -1 + \sqrt{a^2 + b^2};$$

on déduit

$$a = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}{1 + \sin \frac{1}{2} \varphi}; \quad b = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \varphi}{1 + \sin \frac{1}{2} \varphi};$$

faisant $\varphi + \psi = 2q$, il vient

$$a = 1 - \tan^2 \frac{1}{4} \psi; \quad b = 2 \tan \frac{1}{4} \psi; \quad 1 - a = \tan^2 \frac{1}{4} \psi.$$

Applications numériques.

6° Soit à extraire la racine carrée de x^2+y^2 ; supposons qu'elle soit égale à $ax+by$; l'erreur totale sera $ax+by-\sqrt{x^2+y^2}$, et l'erreur relative est $\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}-1=z$;

on cherche les valeurs de a et b , qui donnent à z une valeur minimum dans l'intervalle de 0 à φ ; faisant par exemple $\varphi=1^\circ$, on obtient $a=b=0,8284$; $1-a=0,1716$; on a donc,

à moins d'un 0,1716 ou $\frac{1}{6}$ près, $\sqrt{x^2+y^2}=0,83(x+y)$,

et x et y étant quelconques, faisant successivement

$$\text{tang } \varphi = 0, 1, 2, 3, 4 \dots 10,$$

on obtient pour le radical $\sqrt{x^2+y^2}$, d'une manière approchée.

$$0 - 0,8284(x+y) \text{ à } \frac{1}{6} \text{ près } x \text{ et } y \text{ quelconques.}$$

Erreurs.

$$1 - 0,96046x + 0,39783y - \frac{1}{25} - x > y$$

$$2 - 0,98592x + 0,23270y - \frac{1}{71} - x > 2y$$

$$3 - 0,99350x + 0,16123y - \frac{1}{154} - x > 3y$$

$$4 - 0,99625x + 0,12260y - \frac{1}{200} - x > 4y$$

$$5 - 0,99757x + 0,09878y - \frac{1}{417} - x > 5y$$

$$6 - 0,99826x + 0,08261y - \frac{1}{589} - x > 6y$$

$$7 - 0,99875x + 0,07098y - \frac{1}{800} - x > 7y$$

$$8 - 0,99905x + 0,06220y - \frac{1}{1049} - x > 8y$$

$$9 - 0,99930x + 0,05535y - \frac{1}{1428} - x > 9y$$

$$10 - 0,99935x + 0,04984y - \frac{1}{1578} - x > 10y$$

Ce tableau, que nous avons copié dans le mémoire de M. Poncelet, est extrêmement utile dans la pratique.
