

LEBESGUE

**Résolution en nombres entiers de
l'équation $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 37-39

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__37_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS

de l'équation $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

PAR M. LEBESGUE.

Un facteur carrés commun à trois des termes x^2, y^2, z^2, t^2 de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2, \quad (a)$$

doit disparaître par la division; cela fait, on reconnaît de suite que des quatre nombres x, y, z, t , il y en a deux pairs, quand ils ne sont pas tous impairs; on pourra donc poser, v, q, r, s étant des nombres entiers positifs ou négatifs :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 2p \\ x + y - z - t = 2q \\ x - y + z - t = 2r \\ -x + y + z - t = 2s \end{array} \right\} \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} 2x = p + q + r - s \\ 2y = p + q - r + s \\ 2z = p - q + r + s \\ 2t = p - q - r - s \end{array} \right.$$

La substitution dans l'équation (a) donne

$$pq = rs;$$

de là $s = \frac{pq}{r}$.

Comme s doit être entier, si R est le plus grand commun diviseur de p et r , et qu'on ait $p = PR, r = R\rho$, il en résultera $s = \frac{Pq}{\rho}$; et comme P, ρ sont premiers entre eux, il faudra poser $q = Q\rho$, d'où $s = PQ$.

Ainsi on aura, en substituant pour p, q, r, s , leurs valeurs $PR, Q\rho, R\rho, PQ$:

$$\begin{aligned} 2x &= P(R-Q) + \rho(R+Q), \quad 2y = P(R+Q) - \rho(R-Q) \\ 2t &= P(R-Q) - \rho(R+Q), \quad 2z = P(R+Q) + \rho(R-Q). \end{aligned}$$

On tire de là

$$2(x^2 + y^2) = (P^2 + \rho^2)(Q^2 + R^2).$$

Pour que le second membre soit divisible par 2, il faut que dans un au moins des facteurs binômes $P^2 + \rho^2$, $Q^2 + R^2$, les deux termes soient tous deux pairs ou tous deux impairs. Si le binôme $P^2 + \rho^2$ remplit cette condition, en vertu de

$$\frac{P^2 + \rho^2}{2} = \left(\frac{P + \rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{P - \rho}{2}\right)^2 = Q_1^2 + R_1^2,$$

il viendra

$$x^2 + y^2 = (Q_1^2 + R_1^2)(Q^2 + R^2).$$

Ainsi $x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = A$ est un nombre composé.

Si cependant on avait $R_1 = 0$, $Q_1 = 1$, ce qui suppose $P = \rho = 1$, on n'aurait plus que

$$x^2 + y^2 = Q^2 + R^2,$$

qui peut être premier, mais alors

$$x = R, \quad y = Q, \quad z = R, \quad t = -Q;$$

on n'a plus réellement qu'une seule décomposition de A en deux carrés.

Théorème. Tout nombre A qui peut être mis de deux manières sous la forme $f^2 + g^2$ est nécessairement non premier.

Remarque. Tout nombre qui ne peut être mis qu'une seule fois sous la forme $f^2 + g^2$ est premier. La démonstration présente plus de difficulté.

Problème. Résoudre l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

On fera $t = 0$; de là, $P(R-Q) = \rho(P+Q)$, l'élimination de ρ conduit à la solution

$$(R^2 - Q^2)^2 + (2QR)^2 = (R^2 + Q^2)^2.$$

Il suffit d'omettre un facteur commun aux nombres x, y, z .

Problème. Résoudre $x^2 + y^2 = 2z^2$?

Il faut poser $z = t$, de là, $R\rho + PQ = 0$; en éliminant ρ et omettant un facteur commun, on trouve

$$x = R^2 - 2QR - Q^2,$$

$$y = R^2 + 2QR - Q^2,$$

$$z = R^2 + Q^2.$$

Problème. Résoudre $x^2 + y^2 = 2(z^2 + t^2)$.

Comme x et y doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs, on aura

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = z^2 + t^2.$$

On est ramené au premier problème.

Problème. Résoudre l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ en nombres entiers.