

EUGÈNE JUBÉ

**Note sur le rapport de la circonférence
au diamètre par la méthode des
surfaces équivalentes**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 366-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__366_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur le rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des surfaces équivalentes (V. t. I, p. 192 et t. V, p. 42).

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur au lycée de Saint-Omer.

En nommant R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit à un polygone régulier donné en surface, et R', r' ceux qui correspondent à un polygone régulier aussi équivalent au premier, mais dont le nombre des côtés est double, on a (Legendre, liv. IV, th. XVI) :

$$R' = \sqrt{rR}, \quad r' = \sqrt{r \frac{R+r}{2}}.$$

Si on applique ces formules au calcul des mêmes lignes relatives à des polygones réguliers de même surface dont les

nombre de côtés s'accroissent toujours en doublant, après n opérations on arrivera à deux rayons R_n, r_n dont la différence pourra être aussi petite qu'on voudra.

En effet $R' - r' = \frac{r}{2}(R - r)$; d'où $R' - r' = \frac{r}{2(R' + r')}(R - r)$, mais $r' > r$ et $R' > r'$, donc $R' - r' < \frac{1}{4}(R - r)$: si R' et r' se rapportent à un nouveau polygone de même surface ayant encore deux fois plus de côtés, on aura semblablement $R'' - r'' < \frac{1}{4}(R' - r')$ et *à fortiori* $R'' - r'' < \frac{1}{4^2}(R - r)$; et enfin pour le polygone qui aura 2^n fois plus de côtés que le premier, $R_n - r_n < \frac{1}{4^n}(R - r)$. On pourra donc prendre n assez grand pour que $R_n - r_n$ soit plus petit que toute quantité donnée.

Représentons par ρ le rayon du cercle équivalent à chacun des polygones considérés, alors $R_n > \rho > r_n$; donc la limite de R_n et de r_n est ρ .

Pour calculer ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$ il suffira de trouver pour $R_n - r_n$ une valeur moindre que $\frac{2}{10^m}$, car alors $R_n - \frac{R_n + r_n}{2}$ sera inférieur à $\frac{1}{10^m}$ de même que $\frac{R_n + r_n}{2} - r_n$, et par suite $\frac{R_n + r_n}{2}$ sera la valeur de ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$.

On aura $R_n - r_n < \frac{2}{10^m}$, si on pose $\frac{1}{4^n}(R - r) < \frac{2}{10^m}$. Soit 4 la valeur commune du cercle et des polygones, et R, r , relatifs au carré; alors $r = 1$, $R = \sqrt{2}$; et en posant $\frac{1}{4^n}(\sqrt{2} - 1) < \frac{2}{10^m}$ on a, en employant les log. ordinaires, $m + L(\sqrt{2} - 1) < (1 + 2n)L2$; relation qui aura lieu *à for-*

iori en prenant $m \stackrel{=}{<} (1 + 2n)L2$ ou $n \stackrel{=}{>} \frac{m}{2 - L2} - \frac{1}{2}$. Mais $L2 = 0,30103$, et $2L2$ vaut $\frac{3}{5}$ à peu près; donc en prenant $n \stackrel{=}{>} \frac{5}{3}m - \frac{1}{2}$, $\frac{R_n + r_n}{2}$ sera la valeur de ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$, et le dernier polygone à considérer aura 4×2^n côtés.

Comme cette valeur de ρ est comprise entre 1 et 2, ρ^2 sera exprimé avec m chiffres décimaux exacts, et en divisant 4 par cette quantité on obtiendra π avec m chiffres décimaux exacts.

Cette méthode sera un peu moins avantageuse que celle des isopérimètres (t. V, p. 42).
