

DIEU

Concours pour l'admission à l'École normale (1848)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 342-345

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__342_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE
(1848),

PAR M. DIEU,
Agrégé de l'Université, à Dijon.

Problème de statique.

Déterminer la position d'équilibre d'une tige pesante MM' ,
de longueur l et de poids P , dont les extrémités sont assu-

jetties à rester sur deux droites fixes, dont l'une est verticale et l'autre dans une direction quelconque.

(Fig. 49). Soient Oz la verticale et RS l'oblique fixes; en prenant pour axe des x la direction de leur plus courte distance, les équations de RS sont

$$x = p, \quad y = bz. \quad (1)$$

Soient MM' la position d'équilibre, z l'ordonnée de M et x', y', z' les coordonnées de M' , on a :

$$x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2 = l^2. \quad (2)$$

On peut faire abstraction des droites fixes, pourvu qu'on applique à la tige en M et M' , des forces r et r' respectivement normales à ces droites, égales et contraires aux pressions qu'elles supportent; la première est parallèle à $\widehat{xy}$, donc sa direction est déterminée par l'angle α que sa projection sur ce plan fait avec Ox ; la direction de la seconde le sera par les angles α', β', γ' qu'elle fait avec les trois axes.

$$\text{On a :} \quad b \cos \beta' + \cos \gamma' = 0, \quad (3)$$

pour exprimer que r' est normale à RS .

La translation de r, r' et P à l'origine ne fournit qu'un couple dirigé dans le plan $\widehat{xy}$, dont le moment est

$$r'(x' \cos \beta' - y' \cos \alpha');$$

par conséquent on doit avoir $\frac{y'}{x'} = \frac{\cos \beta'}{\cos \alpha'}$ pour que l'équilibre ait lieu, et r' est dirigée dans le plan OMM' ; donc ce plan doit contenir aussi la direction de r , puisque celle de P y est comprise, et P doit être égale et directement opposée à la résultante de r et r' .

Soient HT et HC deux lignes représentant en grandeur et en direction les forces r et r' rapportées à leur point de concours; la diagonale HB du parallélogramme $HFBC$ représente une force égale et contraire à P .

Cela posé, HBC rectangle en B donne :

$$r'^2 = P^2 + r^2 \quad \text{et} \quad \cos \gamma' = \frac{P}{r'};$$

et les triangles semblables HBC, HDM' donnent :

$$r = P \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{2(z - z')}, \quad r' = P \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 4(z' - z)^2}}{2(z - z')}$$

$$\text{donc,} \quad \cos \gamma' = \frac{2(z - z')}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 4(z' - z)^2}};$$

et l'on a, par

$$\cos \beta' = \frac{y'}{x'} \cos \alpha' \quad \text{et} \quad \cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1,$$

$$\cos \alpha' = \frac{-x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 4(z' - z)^2}}, \quad \cos \beta' = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + 4(z' - z)^2}}.$$

D'après cela, l'équation (3) donne :

$$z - z' = \frac{by'}{2},$$

et (2),

$$x'^2 + \left(1 + \frac{b^2}{4}\right) y'^2 = l^2.$$

Cette dernière représente un cylindre elliptique qui coupera RS dans les positions qu'on pourra donner à M'. En y remplaçant x' par p et y' par bz' [équation (1)], il vient :

$$z' = \pm \frac{1}{b} \sqrt{\left(\frac{l^2 - p^2}{1 + \frac{1}{4}b^2}\right)},$$

pour les coordonnées $\hat{z}$ de ces points, et l'on a la condition que l ne soit pas inférieur à p pour que le problème soit possible, ce qui est évident *a priori* : si $l > p$, il y aura deux solutions et si $l = p$, il n'y aura pas de position d'équilibre,

car alors r et r' seraient dirigées suivant la tige elle-même et ne pourront avoir une résultante égale et contraire à P .

Enfin les expressions précédentes feront connaître toutes les autres inconnues de la question.