

TERQUEM

Théorème sur les cercles osculateurs dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 21-22

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__21_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME

sur les cercles osculateurs dans les coniques.

—

Par tout point d'une conique passent quatre cercles osculateurs; les quatre points d'osculation sont sur une même circonférence. (Steiner.)

1. Lemme. Soient

$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; $Ay^2 - Cx^2 + D'y + E'x + F' = 0$
les équations des deux coniques ; les axes coordonnés étant parallèles aux axes principaux, les points d'intersection des deux coniques sont sur une même circonférence.

Démonstration. Les deux équations donnent celles-ci :

$$2Cx^2 + y(D - D') + x(E - E') + F - F' = 0,$$

$$2Ay^2 + y(D + D') + x(E + E') + F + F' = 0;$$

d'où

$$2ACy^2 + 2ACx^2 + y [D(A + C) + D'(C - A)] + \\ + x [E(A + C) + E'(C - A)] + F(A + C) + F'(C - A) = 0,$$

équation d'un cercle.

Observation. Si $C = 0$, le cercle devient une droite.

Observation. Le lemme renferme cet énoncé géométrique : lorsqu'une hyperbole et une ellipse ont leurs axes princi-

paux parallèles, les points d'intersection sont sur une même circonférence.

II. Soit $Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex = 0$ l'équation d'une conique, les axes coordonnés parallèles aux axes principaux; et soient x', y' les coordonnées d'un point d'osculation d'un cercle qui passe par l'origine; la droite qui passe par le point et l'origine a pour équation $yx' = xy'$, et la tangente en ce point a pour équation

$$y(2Ay' + D) + x(2Cx' + E) + Dy' + Ex' + 2F = 0;$$

ces deux droites sont également inclinées sur les axes principaux; donc

$$\frac{2Cx' + E}{2Ay' + D} = \frac{y'}{x'}; \quad \text{d'où} \quad 2Ay'^2 - 2Cx'^2 + Dy' - Ex' = 0;$$

et l'on a aussi

$$2Ay'^2 + 2Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' = 0;$$

donc, d'après le lemme, les quatre points d'intersection sont sur une même circonférence. Tm.