

PAUL SERRET

Démonstration analytique de l'identité de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7
(1848), p. 199-201

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__199_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE

de l'identité de Waring (Voir t. IV, p. 183).

PAR M. PAUL SERRET.

Identité. Soient n quantités quelconques $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$,
on a l'identité :

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + \\ & + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) a_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + \\ & + (a_n + a_{n-1}) a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + \\ & + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2) a_1 (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1). \quad (1) \end{aligned}$$

Démonstration. L'identité est évidente pour le cas de $n=2$;
car on a $a_1 a_2 (a_1 + a_2) = a_2 a_1 (a_2 + a_1)$. Donc il suffira de prouver
que si l'identité (1) est vraie pour n quantités, elle sera vraie
aussi pour $n+1$ quantités ; ou, en d'autres termes, il suffira

de prouver que si l'égalité (1) existe, l'égalité suivante existe aussi :

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + \\ & + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) a_n (a_1 + \dots + a_n) + \\ & + (a_1 + \dots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \dots + a_{n+1}) = a_{n+1} a_n (a_{n+1} + a_n) + \\ & + (a_{n+1} + a_n) a_{n-1} (a_{n+1} + a_n + a_{n-1}) + \dots + \\ & + (a_{n+1} + a_n + \dots + a_2) a_1 (a_{n+1} + a_n + \dots + a_2 + a_1). \quad (2) \end{aligned}$$

Désignons respectivement par P et Q le premier et le deuxième membre de l'égalité à démontrer (2).

Or, en ayant égard à l'égalité (1), on peut écrire P ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} P = & \overline{a_{n+1}}^2 (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + \\ & + a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + (a_n + a_{n-1}) a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + \\ & + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2) a_1 (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1). \end{aligned}$$

Maintenant, si nous développons de même Q par rapport aux puissances décroissantes de a_{n+1} , nous trouverons :

$$\begin{aligned} Q = & \overline{a_{n+1}}^2 (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) + a_{n+1} [\overline{a_n}^2 + a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + \\ & + a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + a_1 (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1)] + \\ & + a_{n+1} [a_n a_{n-1} + a_{n-2} (a_n + a_{n-1}) + a_{n-3} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \\ & + \dots + a_1 (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2)] + a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + \\ & + (a_n + a_{n-1}) a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots + \\ & + (a_n + a_{n+1} + \dots + a_2) a_1 (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1). \end{aligned}$$

Dans P et Q ainsi développées, les parties indépendantes de a_{n+1} sont identiquement égales, ainsi que les parties contenant le carré de a_{n+1} en facteur. Quant aux termes de Q contenant a_{n+1} en facteur commun, il est facile de voir qu'on peut écrire leur ensemble sous cette forme :

$$a_{n+1} [\Sigma \overline{a_n}^2 + \Sigma . 2 a_n a_{n-1}];$$

$\Sigma \overline{a_n}^2$ représentant la somme des carrés des n quantités $a_1, \dots, a_n$, et $\Sigma . 2 a_n a_{n-1}$ représentant la somme des doubles pro-

duits de ces n quantités prises deux à deux. Mais d'après la composition du carré d'un polygone, on a :

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1)^2 = \Sigma a_n^2 + \Sigma 2a_n a_{n-1}.$$

Donc l'ensemble des termes de Q contenant a_{n+1} en facteur commun est identique à l'ensemble des termes de P contenant le même facteur ; et d'ailleurs les autres parties de P et Q étant les mêmes, on a l'identité $P=Q$, ou l'égalité (2).
C Q. F. D.

Note. Waring parvient à cette identité à l'aide d'une double expression qui donne l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole.

Tm.