Exercices sur les équations irrationnelles rendues rationnelles, d'après M. Forstemann, à Dantzig

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 156-157

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__156_0>

EXERCICES

sur les équations irrationnelles rendues rationnelles,

d'après M. FORSTEMANN, à Dantzig. (Crelle, XIV, 236, 1835.)

—

1. $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0$; $A-B=0$.

2. $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}=0$; $A^2+B^2+C^2-2(AB+AC+BC)=0$.

3. $\sqrt{x+x_1}+\sqrt{x+x_2}+\sqrt{x+x_3}=0$;
$3x^2-2\Sigma x_1.x+\Sigma x_1^2-2\Sigma x_1x_2=0$;

Σ désigne des fonctions symétriques.

4. $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=0$;
$\Sigma A^4-4\Sigma A^3B+6\Sigma A^2B^2+4\Sigma A^2BC-40ABCD=0$.

5. $\sqrt{x+x_1}+\sqrt{x+x_2}+\sqrt{x+x_3}+\sqrt{x+x_4}=0$;
$Mx-N=0$; $M=8\Sigma x_1^3-\Sigma x_1x_2^2+2\Sigma x_1x_2x_3$;
$N=\Sigma x_1^4-4\Sigma x_1^3x_2+6\Sigma x_1^2x_2^2+4\Sigma x_1^2x_2x_3-40x_1x_2x_3x_4$;
$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=5$; $x=\frac{N}{M}=-\frac{71}{120}$;
$x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$; $x=\infty$.

6. Question : A quel degré monte l'équation rendue rationnelle suivante ?
$\sqrt{x+x_1}+\sqrt{x+x_2}+\sqrt{x+x_3}+\ldots\sqrt{x+x_n}=0$.

7. $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$; $\Sigma A^3+3\Sigma A^2B-21ABC=0$.

8. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-7}-\sqrt[3]{3x+3}=0$; $x=8$;
$x=-\frac{1}{40}(31\pm\sqrt{-1539})$.

9. $\sqrt[3]{x+x_1}+\sqrt[3]{x+x_2}+\sqrt[3]{x+x_3}=0$; $Mx+N=0$.
$M=9[\Sigma x_1^2-\Sigma x_1x_2]$; $N=\Sigma(x_1)^3-27x_1x_2x_3$.

10. $\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C}=0$;

$\Sigma A^4 - 4\Sigma A^3 B + 6\Sigma A^2 B^2 - 124\Sigma A^2 BC = 0.$

11. $\sqrt[4]{x+x_1}+\sqrt[4]{x+x_2}+\sqrt[4]{x+x_3}=0$;

$Mx^4+Nx^3+Px^2+Qx+R=0$; $M=375$; $N=500\Sigma x_1$;

$P=130\Sigma x_1^2+620\Sigma x_1 x_2$; $Q=4\Sigma x_1^3+124\Sigma x_1^2 x_2+498 x_1 x_2 x_3$;

$R=-\Sigma x_1^4+4\Sigma x_1^3 x_2-6\Sigma x_1^2 x_2^2+124\Sigma x_1^2 x_2 x_3$;

$x_1=80$; $x_2=15$; $x_3=0$;

$3x^4+380x^3+12842x^2+129580x-142805=0$; $x=1$;

$x=-80{,}000524$; $x=-23{,}8307\pm 5{,}19631\sqrt{-1}$.

12. $$\frac{1}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}=\frac{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}{A+B}.$$