

DROT

Solution d'un problème sur les arrangements

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 97-100

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__97_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__97_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION

d'un problème sur les arrangements

PAR M. DROT,

Professeur au Collège de Poitiers.

1. Étant données plusieurs espèces de lettres $a, b, c \dots r, s$

et un nombre déterminé de lettres de chaque espèce, de manière que leur produit puisse être représenté par $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma$ trouver le nombre des arrangements de ces lettres n à n . (Le nombre total des lettres $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \rho + \sigma = m$.)

On adopte, pour les arrangements en question, la notation $(a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma A_n)$. Cela posé, le nombre des arrangements qui ne contiennent pas a est évidemment $(b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma A_n)$. Pour avoir ceux qui contiennent a une fois, on arrangera $n - 1$ à $n - 1$ les lettres $b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma$, et dans chacun de ces arrangements, on placera a à toutes les places possibles au nombre de n ; le nombre des arrangements en question sera donc $n(b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma A_{n-1})$. Pour avoir les arrangements qui contiennent a deux fois, arrangeons $n - 2$ à $n - 2$ les lettres $b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma$ et disposons dans chacun de ces arrangements, de toutes les manières possibles, les lettres a et a' ; la lettre a pourra être placée à $n - 1$ places différentes; et en prenant un des résultats obtenus, la lettre a' pourra encore y être placée à n places différentes; donc, dans chacun des arrangements en question, il y aura $n(n - 1)$ manières de disposer les lettres a et a' . Supposons actuellement $a = a'$; en prenant un des arrangements précédemment formés, et en y permutant de toutes les manières possibles, c'est-à-dire de $1 \cdot 2$ manières, les deux lettres a et a' , sans toucher aux autres lettres, on aura autant d'arrangements qui précédemment étaient différents et qui maintenant deviennent les mêmes. Donc, en résumé, le nombre de manières de disposer deux lettres semblables dans chacun des arrangements $n - 2$ à $n - 2$ de $b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma$ se réduira à $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$; donc le nombre total des arrangements qui contiennent a deux fois est représenté par $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (b^\beta c^\gamma \dots r^\rho s^\sigma A_{n-1})$. On trou-

vera, par des raisonnements analogues, que le nombre des arrangements qui contiennent a trois fois est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_{n-3})$; que le nombre des arrangements qui contiennent a α fois est exprimé par $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \alpha} (b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_{n-\alpha})$. Donc on a la formule générale :

$$\begin{aligned} (a^{\alpha} b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_n) &= (b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_n) + n(b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_{n-1}) + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_{n-2}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_{n-3}) \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \alpha} (b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_{n-\alpha}). \end{aligned}$$

Cette formule ramène le problème proposé à d'autres du même genre, mais plus simples, sur lesquels on raisonnera de la même manière.

On observera 1° que si $\alpha > n$, on pourra évidemment le réduire à n sans rien changer; de manière que si $\alpha \geq n$, $\epsilon \geq n$, $\gamma \geq n \dots$, le problème se ramènera à celui des arrangements complets des lettres $a, b, c \dots r, s$ pris n à n .

2° Que si $\alpha = \epsilon = \gamma = \dots = \sigma = 1$, le problème devient un problème d'arrangements ordinaires.

3° Que si $\epsilon + \gamma + \dots + \rho + \sigma < n$, l'expression $(b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_n) = 0$; de même pour les autres, dans les cas semblables.

4° Que si $n = \alpha$, l'expression $(b^6 c^7 \dots r^{\rho} s^{\sigma} A_n)$ devra être considérée comme égale à 1.

On parviendra finalement à avoir à calculer des expressions telles que $s^{\sigma} A_n$, et une pareille expression revient, d'après la première remarque, si $\sigma \geq n$, à $s^n A_n = 1$; et si $\sigma < n$, elle est égale à 0, d'après la troisième remarque.

