

TURQUAN

Démonstrations élémentaires de plusieurs propriétés de la spirale logarithmique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 88-97

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__88_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

de plusieurs propriétés de la spirale logarithmique.

PAR M. TURQUAN,

Professeur au Collège royal de Pontivy.

1° Le lieu de l'équation $r = ke^{m\varphi}$ rapportée aux coordonnées polaires r et φ , est une spirale, qu'on a appelée loga-

rithmique, parce que l'angle φ croissant en progression arithmétique, les rayons vecteurs correspondants croissent en progression géométrique.

On voit facilement que k est le rayon vecteur correspondant à $\varphi = 0$, et qu'en faisant varier la direction de l'axe polaire, on peut faire passer k par tous les degrés de grandeur; et que réciproquement si on fait passer le coefficient k par différents degrés de grandeur, on changera seulement la direction de l'axe polaire; et qu'ainsi la grandeur de ce coefficient n'a aucune influence sur les dimensions de la courbe. D'ailleurs ce coefficient ne peut pas être nul.

Une des propriétés les plus remarquables de la spirale logarithmique, qui peut lui servir de définition géométrique, c'est celle de couper ses rayons vecteurs sous un angle constant. On démontre assez facilement cette propriété, en cherchant l'expression de l'angle que la tangente en un point donné fait avec le rayon vecteur qui aboutit à ce point; car cet angle est donné par la formule $\text{tang } \theta = r \lim \frac{h}{k}$; r étant le rayon vecteur du point donné, k la différence de ce rayon vecteur et du rayon voisin, et h l'angle de ces deux rayons. On aura donc :

$$\begin{aligned} \text{tang } \theta &= r \lim \frac{\varphi_1 - \varphi}{r_1 - r} = r \lim \frac{\varphi_1 - \varphi}{k(e^{m\varphi_1} - e^{m\varphi})} = \\ &= r \lim \frac{1}{mk \left\{ 1 + \frac{m}{1.2} (\varphi_1 + \varphi) + \frac{m^2}{1.2.3} (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi + \varphi^2) + \dots \right\}}; \end{aligned}$$

et à la limite, quand $\varphi_1 = \varphi$

$$\text{tang } \theta = r \times \frac{1}{km \left(1 + m\varphi + \frac{m^2}{1.2} \varphi^2 + \dots \right)} = \frac{r}{mr} = \frac{1}{m}.$$

Il est essentiel de remarquer que la constante m est la cotangente de l'angle θ .

2° Réciproquement la courbe qui coupe ses rayons vecteurs sous un angle constant, est une spirale logarithmique. Car si (*fig. 10 bis*), $MM'M'' \dots$ est le lieu géométrique demandé, et qu'on mène les rayons vecteurs $AM, AM' \dots$ qui fassent entre eux un angle constant, qu'on mène des tangentes aux points $MM'M''$, et qu'on prolonge les rayons vecteurs jusqu'à la rencontre des tangentes en $TT'T'' \dots$ les triangles $AM'T, AM''T', AM'''T'' \dots$ seront équiangles et semblables, donc AM est à AM' dans le même rapport que AM' est à $AM'' \dots$ etc. C'est-à-dire en d'autres termes que l'angle φ croissant en progression arithmétique, le rayon vecteur croît en progression géométrique; donc le rayon vecteur r est lié à l'angle φ par la relation

$$r = ka^{\varphi} \quad \text{ou} \quad r = ke^{m\varphi} \quad \text{en posant} \quad a = e^m.$$

3° Si on fait croître l'angle φ depuis une certaine valeur φ_1 jusqu'à $\varphi_1 + 2\pi$, l'arc décrit par l'extrémité du rayon vecteur s'appelle une spire. L'angle continuant à croître de la même quantité 2π , on aura une seconde spire. Ces deux spires sont des arcs semblables.

Supposons pour plus de simplicité, que ces deux spires commencent à l'axe polaire; si par le pôle on mène une droite qui fasse avec cet axe polaire un angle quelconque α , et qu'on joigne les points où cette droite rencontre les deux spires, à l'origine des spires, on aura deux triangles semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. En effet, le rapport de ces deux côtés pour le triangle inscrit dans la première spire est

$$\frac{r}{r'} = \frac{k}{ke^{m\alpha}} = \frac{1}{e^{m\alpha}};$$

le rapport des deux côtés homologues du triangle inscrit dans la seconde spire est

$$\frac{r_1}{r_1'} = \frac{ke^{2m\pi}}{ke^{2m\pi+m\alpha}} = \frac{1}{e^{m\alpha}}.$$

Une autre spire dont l'origine serait ailleurs que sur l'axe polaire serait encore un arc semblable aux deux spires précédentes. En effet soit φ , l'angle que la droite qui passe par le pôle et l'origine de la spire fait avec l'axe polaire, menons un rayon vecteur qui fasse avec cette droite un angle α , et joignons le point où il rencontre la spire à l'origine de cette spire ; le rapport des côtés qui comprennent l'angle α dans le triangle ainsi formé, sera encore $\frac{1}{e^{m\alpha}}$.

On voit facilement maintenant que si r_1 et r_2 sont deux rayons vecteurs qui fassent entre eux un angle quelconque α , et r_1' et r_2' deux autres rayons vecteurs qui fassent entre eux le même angle, ces rayons vecteurs étant prolongés indéfiniment, intercepteront sur la spirale une infinité d'arcs qui sont semblables.

4° Il résulte de là que pour voir si deux spirales logarithmiques sont semblables, il suffit de mener dans chacune deux rayons vecteurs faisant entre eux le même angle ; de joindre les extrémités de ces rayons vecteurs, et d'examiner si les deux triangles ainsi formés sont semblables. Soient donc :

$$r = ke^{m\varphi} \quad \text{et} \quad s = k'e^{m'\varphi},$$

les équations de deux spirales logarithmiques, en faisant les constructions du numéro précédent ; le rapport des deux côtés comprenant l'angle égal pour le triangle inscrit dans la première spirale sera $\frac{r}{r'} = \frac{1}{e^{m\alpha}}$, le rapport de ces deux côtés

pour le triangle inscrit dans la seconde spirale sera $\frac{s}{s'} = \frac{1}{e^{m'\alpha}}$.

Or ces deux triangles ne pourront être semblables, et par conséquent les deux spirales elles-mêmes ne pourront être

semblables, qu'autant qu'on aura $m = m'$. Mais alors les deux spirales seront égales; et seront seulement différemment placées si k' est différent de k .

Ainsi la spirale logarithmique jouit de cette propriété singulière, de n'avoir aucune courbe semblable à elle-même

5° La spirale logarithmique est facilement rectifiable; en effet, si on considère un polygone (*Fig. 11 bis*) $MM'M''M''' \dots$ dont les côtés coupent sous un angle constant $\angle MM''M''' = \theta$ les rayons vecteurs qui aboutissent à ses extrémités, qu'on projette les côtés $MM', M'M'', M''M''' \dots$ sur $AM', AM'', AM''' \dots$ et qu'on rabatte les projections des sommets sur le rayon vecteur $AM''' \dots$. La longueur $M''M'''$, différence des rayons extrêmes Ap et AM''' sera égale à

$$MM' \cos \theta + M'M'' \cos \theta + M''M''' \cos \theta \dots,$$

d'où

$$MM'M''M''' = \frac{AM''' - Ap}{\cos \theta}$$

Or cette propriété a lieu indépendamment de la longueur et du nombre des côtés $MM', M'M'', M''M''' \dots$ etc. Donc elle aura lieu aussi quand ces côtés seront infiniment petits, mais alors Ap deviendra AM ; et le polygone se changera en une spirale logarithmique. Donc un arc de spirale logarithmique est égal à la différence des rayons vecteurs qui aboutissent à ses extrémités, divisé par le cosinus de l'angle constant θ , sous lequel ces rayons vecteurs sont coupés par la courbe.

De là la construction suivante: si par l'extrémité M''' de l'arc MM''' , où aboutit le plus grand rayon vecteur, on mène une tangente, qu'on prenne sur AM''' une longueur $Am = AM$; que par le point m on mène une perpendiculaire à AM' , et qu'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à ce

qu'elle rencontre la tangente en T ; la partie M'''T sera égale à l'arc MM'''.

Toutes ces propriétés subsistent , quelle que soit la grandeur du rayon k correspondant à $\varphi = 0$. Ainsi rien n'empêche de supposer ce rayon infiniment petit et de compter l'arc MM' à partir de son extrémité, ou, ce qui sera la même chose, à compter les arcs à partir du pôle lui-même ; alors, d'après la construction précédente, si par le pôle on mène une perpendiculaire à AM', et qu'on prolonge cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la tangente en T', la partie M'T' de cette tangente sera égale à l'arc de spirale logarithmique compté à partir du pôle jusqu'au point M'. Et cet arc a une longueur finie, quoique composé d'un nombre infini de spires.

Si la distance mM' est partagée en R, en deux parties proportionnelles à deux longueurs données a et b , la perpendiculaire élevée à AM' par le point R partagera aussi M'T dans le rapport de a à b ; d'où il résulte que si du pôle comme centre avec un rayon égal à AR on décrit une circonférence, cette circonférence partagera l'arc MM' dans le rapport de a à b .

On voit facilement par quelle construction on partagerait un arc de spirale logarithmique en autant de parties égales qu'on voudrait. Je ferai seulement remarquer que le rayon du cercle qui partage cet arc en deux parties égales est la moyenne différentielle des rayons vecteurs des extrémités de cet arc.

6° Je passerai maintenant à la quadrature du secteur compris entre deux rayons vecteurs et l'arc qu'ils interceptent. Je partage l'angle de ces deux rayons vecteurs en un nombre n de parties égales, assez grand pour que les arcs interceptés par les rayons vecteurs de division puissent être pris pour une ligne droite. Soient $r_1, r_2, r_3 \dots r_{n+1}$ la suite de

ces rayons vecteurs, $s_1, s_2, s_3, \dots$ les arcs correspondants ; chaque triangle élémentaire aura pour mesure :

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} r_1 s_1 \sin \theta & \text{ou} & \frac{1}{2} r_2 (r_2 - r_1) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \frac{1}{2} r_2 s_2 \sin \theta & & \frac{1}{2} r_3 (r_3 - r_2) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \dots & & \dots \\ \frac{1}{2} r_{n+1} s_n \sin \theta & & \frac{1}{2} r_{n+1} (r_{n+1} - r_n) \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \end{array}$$

Les rayons vecteurs croissant en progression géométrique, je désignerai par q la raison de cette progression, et j'aurai :

$$\begin{aligned} r_2 &= q r_1 \quad r_3 = q^2 r_1 \quad r^4 = q^3 r_1 \quad \dots \quad r_{n+1} = q^n r_1 \\ r_2 - r_1 &= (q - 1) r_1 \quad r_3 - r_2 = q r_1 (q - 1) \quad \dots \\ \dots \quad r_{n+1} - r_n &= q^{n-1} r_1 (q - 1); \end{aligned}$$

et par suite, pour les surfaces des triangles élémentaires :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 (q - 1) q; \quad & \frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 (q - 1) q^3 \\ \frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 (q - 1) q^5 \dots & \frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 (q - 1) q^{2n-1}. \end{aligned}$$

La somme de ces aires sera :

$$\frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 (q - 1) (q + q^3 + q^5 + \dots + q^{2n-1}) = \frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 q \frac{q^{2n} - 1}{q + 1}$$

ou

$$\frac{1}{2} \tan \theta r_1^2 q \frac{e^{2m(\varphi_{n+1} - \varphi_1)} - 1}{q + 1},$$

φ_{n+1} et φ_1 étant les angles correspondants aux rayons vecteurs r_{n+1} et r_1 . Mais cette expression n'est pas encore rigoureusement l'aire du secteur que nous voulons mesurer. Il faudrait pour cela que le nombre n des parties dans lesquelles on a partagé l'angle $\varphi_{n+1} - \varphi_1$ fût infiniment grand. Pour introduire cette hypothèse, il suffira de faire $q = 1$. On aura donc pour l'aire A du secteur de spirale loga-

rithmique, en remarquant que $\tan \theta = \frac{1}{m}$, et que

$$r_i^2 e^{2m(\varphi_{n+1} - \varphi_i)} = r_{n+1}^2,$$

$$A = \frac{1}{4m} (r_{n+1}^2 - r_i^2).$$

On aura encore :

$$A = \frac{1}{2} s \left(\frac{r_{n+1} - r_i}{2} \right) \sin \theta,$$

en appelant s l'arc compris entre r_{n+1} et r_i .

Soit R un rayon vecteur qui partage l'aire A en deux parties proportionnelles à a et b , on aura la proportion :

$$r_{n+1}^2 - R^2 : R^2 - r_i^2 :: a : b, \text{ d'où } R^2 = \frac{b}{a+b} r_{n+1}^2 + \frac{a}{a+b} r_i^2.$$

Ainsi, si l'on cherche le côté d'un carré qui soit au carré construit sur r_{n+1} dans le rapport de b à $a+b$, et le côté d'un carré qui soit au carré de r_i dans le rapport de a à $a+b$, puis que du pôle comme centre avec un rayon égal à la diagonale du rectangle construit sur ces deux côtés, on décrive une circonférence, et qu'on joigne le pôle au point où elle rencontre l'arc du secteur ; ce rayon vecteur partagera le secteur en deux parties proportionnelles à a et b .

7° Par les points M et M' (*fig. 12 bis*) menons les tangentes, les normales et les rayons vecteurs ; le quadrilatère formé par les deux tangentes et les deux normales sera inscriptible ; il en sera de même du quadrilatère formé par les deux rayons vecteurs et les deux tangentes. On voit même que ces deux quadrilatères seront inscriptibles dans une même circonférence qui aura pour diamètre la droite qui joint le point d'intersection des deux normales au point d'intersection des deux tangentes.

Si maintenant on imagine que le point M' se rapproche indéfiniment du point M jusqu'à venir coïncider avec lui, le

point d'intersection des deux normales deviendra le centre de courbure ; en même temps la droite qui joint le pôle aux points d'intersection des deux tangentes se confondra avec le rayon vecteur du point M.

Donc la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est égale à ce rayon vecteur lui-même. Donc on aura :

$$r = \rho \sin \theta, \quad \text{d'où} \quad \rho = r \times \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}} ; \quad \rho = r \sqrt{1 + m^2}.$$

Par conséquent , si du pôle on mène une perpendiculaire au rayon vecteur , cette perpendiculaire ira rencontrer la normale au centre de courbure , et la partie de la normale comprise entre ce point et le point M sera le rayon de courbure.

La distance r' du pôle au centre de courbure sera donnée par la proportion

$$r' : r :: \cos \theta : \sin \theta \quad \text{ou} \quad r' : r :: m : 1, \quad \text{d'où} \quad r' = mr ;$$

ou , si on remplace r par sa valeur en fonction de φ ,

$$r' = m k e^{m\varphi}.$$

Ce qui fait voir que le lieu des centres de courbure ou la développée est une spirale logarithmique égale à la première , mais différemment placée.

8° Si , par un point M (*fig. 13*) , on mène une tangente et le rayon vecteur du point M ; puis , par le pôle , une droite qui fasse avec le rayon vecteur un angle quelconque α , et qu'on prolonge cette droite jusqu'à la rencontre de la tangente en T'. Si , par un autre point M' , on mène encore une tangente et un rayon vecteur ; puis , par le pôle , une droite qui fasse avec ce rayon vecteur un angle égal à α , et qui déterminera sur la tangente un point T' ; le lieu des points.

T, T' sera une spirale logarithmique ; car les triangles AMT, AM'T' étant semblables comme équiangles, les angles MTA, M'T'A sont égaux. Or la tangente MT est évidemment normale au lieu des points T. Donc cet angle MTA est le complément de l'angle sous lequel ce lieu géométrique coupe ses rayons vecteurs AT. Cet angle, sous lequel cette nouvelle spirale coupe ses rayons vecteurs, n'est plus égal à l'angle θ , mais à l'angle θ augmenté de l'excès de l'angle MAT sur un angle droit, si l'angle MAT est obtus, ou diminué de l'excès d'un angle droit sur l'angle MAT, si cet angle est aigu.

Cette spirale ne sera une développante de la première que dans un seul cas, celui où l'angle MAT est droit ; et, dans ce cas, le lieu du point T est une spirale logarithmique égale à la première. Dans ce cas encore, le point T est l'extrémité de la sous-tangente.

Note Cette méthode ingénieuse est celle de Wallis, celle qui régnait avant l'invention des nouveaux calculs. Mais pourquoi marcher en arrière ? Pourquoi rendre long et pénible ce qui est court et facile ? Le calcul différentiel est chose élémentaire et aussi rigoureux que l'échafaudage perpétuel des limites ; mais on ne l'enseigne pas. Cette négligence est la honte de l'enseignement collégial en France.

Tm.