

TH. CLAUSEN

**Détermination des axes principaux
de rotation d'un corps, par M. Th.
Clausen, de Munich**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 81-83

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__81_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION

des axes principaux de rotation d'un corps, par
M. Th. Clausen, de Munich.

(Crelle, t. V, p. 383.)

La solution ordinaire conduit à une équation du troisième degré, un peu compliquée; la méthode suivante donne à l'équation une forme plus symétrique; elle a été employée par M. Gauss pour la solution d'un autre problème; l'origine est au centre de gravité du corps; axes rectangulaires; x, y, z , coordonnées d'un point; x', y', z' , coordonnées du même point relativement aux axes principaux; on a :

$$\left. \begin{aligned} \int x^2 dm &= \alpha; & \int xy dm &= \delta \\ \int y^2 dm &= \beta; & \int yz dm &= \varepsilon \\ \int z^2 dm &= \gamma; & \int zx dm &= \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Les six lettres grecques représentent des quantités connues.
Et relativement aux axes principaux :

$$\left. \begin{aligned} \int x'^2 dm &= \xi; & \int x'y' dm &= 0 \\ \int y'^2 dm &= \upsilon; & \int y'z' dm &= 0 \\ \int z'^2 dm &= \zeta; & \int z'x' dm &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

et soit

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= a'x + b'y + c'z \\ z' &= a''x + b''y + c''z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

on doit avoir $x^3 + y^3 + z^3 = x'^3 + y'^3 + z'^3$; donc

$$\left. \begin{aligned} a^3 + a'^3 + a''^3 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ b^3 + b'^3 + b''^3 &= 1, & bc + b'b' + b''c'' &= 0 \\ c^3 + c'^3 + c''^3 &= 1, & ac + a'c' + a''c'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ainsi nous avons douze inconnues, ξ, ν, ζ et les neuf coefficients des équations (3); mais aussi douze équations, savoir les systèmes (2) et (4).

Les équations (3) donnent :

$$\left. \begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z' \\ y &= bx' + b'y' + b''z' \\ z &= cx' + c'y' + c''z' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0 \\ a'^3 + b'^3 + c'^3 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''^3 + b''^3 + c''^3 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Substituant dans les équations (1), les valeurs déduites de (5) et (2), il vient :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a^2\xi + a'^2.\nu + a''^2.\zeta \\ \beta &= b^2\xi + b'^2.\nu + b''^2.\zeta \\ \gamma &= c^2\xi + c'^2.\nu + c''^2.\zeta \\ \delta &= ab\xi + a'b'.\nu + a''b''.\zeta \\ \epsilon &= bc\xi + b'c'.\nu + b''c''.\zeta \\ \theta &= ca\xi + c'a'.\nu + c'a''.\zeta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

celles-ci donnent, ayant égard aux équations (6) :

$$\left. \begin{aligned} \xi a &= \alpha a + \delta b + \theta c \\ \xi b &= \delta a + \beta b + \epsilon c \\ \xi c &= \theta a + \epsilon b + \gamma c \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu a' &= \alpha a' + \delta b' + \theta c' \\ \nu b' &= \delta a' + \beta b' + \epsilon c' \\ \nu c' &= \theta a' + \epsilon b' + \gamma c' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta a'' &= \alpha a'' + \delta b'' + \theta c'' \\ \zeta b'' &= \delta a'' + \beta b'' + \varepsilon c'' \\ \zeta c'' &= \theta a'' + \varepsilon b'' + \gamma c'' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Par l'élimination de a, b, c , des équations (8), on trouve l'équation suivante entre ξ , et les quantités connues α, β, γ , etc. :

$$-\xi)(\beta - \xi)(\gamma - \xi) - \delta^2(\gamma - \xi) - \varepsilon^2(\alpha - \xi) - \theta^2(\beta - \xi) + 2\delta\varepsilon\theta = 0. \quad (11)$$

On voit de suite qu'on trouve une semblable équation, en ν et en ζ , en éliminant a', b', c' entre les équations (9), et a'', b'', c'' entre les équations (10); ainsi, si on développe l'équation (11), et qu'on remplace ξ par u , on obtient :

$$\begin{aligned} u^3 - (\alpha + \beta + \gamma)u^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \delta^2 - \varepsilon^2 - \theta^2)u + \alpha\varepsilon^2 + \\ + \beta\theta^2 + \gamma\delta^2 - 2\delta\varepsilon\theta - \alpha\beta\gamma = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

les trois racines sont les valeurs de ζ , ν et ξ .

Les équations (8) donnent :

$$\left. \begin{aligned} a((\alpha - \xi)\xi - \delta\theta) &= b((\beta - \xi)\xi - \delta\varepsilon) = c((\gamma - \xi)\xi - \theta\varepsilon) \\ \lambda a &= \frac{1}{(\alpha - \xi)\xi - \delta\theta} \\ \lambda b &= \frac{1}{(\beta - \xi)\xi - \delta\varepsilon} \\ \lambda c &= \frac{1}{(\gamma - \xi)\xi - \theta\varepsilon} \\ \lambda^3 &= \frac{1}{((\alpha - \xi)\xi - \delta\theta)^2} + \frac{1}{((\beta - \xi)\xi - \delta\varepsilon)^2} + \frac{1}{((\gamma - \xi)\xi - \theta\varepsilon)^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

On trouve de la même manière a', b', c' en ν , et a'', b'', c'' en ζ .