

DELACOUR

MAYER D'ALMBERT

**Note sur les plans tangents aux surfaces
du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 611-617

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__611_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur les plans tangents aux surfaces du second degré.

PAR MM. DELACOUR ET MAYER D'ALMBERT,

Anciens élèves de l'École polytechnique.

I. L'équation du plan tangent aux surfaces du second ordre de la forme générale

$$(x' - x) \frac{dF}{dx} + (y' - y) \frac{dF}{dy} + (z' - z) \frac{dF}{dz} = 0,$$

ne se prête pas toujours à des calculs simples; il est une forme qui pourra souvent être plus commode, et que nous allons présenter. Nous suivrons une marche analogue à celle qui, dans la géométrie plane, conduit à une équation de la tangente à une courbe du deuxième degré, qui dépende seu-

lement du coefficient d'inclinaison, et non des coordonnées des points de contact.

1° *Ellipsoïde*. Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes, et $px + qy + rz = t$ un plan sécant quelconque, et exprimons que son intersection avec la surface se réduit à un point unique, ou qu'il en est ainsi de sa projection sur un plan quelconque celui des (x, y) par exemple; à cet effet, éliminons z entre ces deux équations, il vient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(t - px - qy)^2}{r^2 c^2} = 1,$$

ou :

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2 r^2}\right) y^2 + \frac{2pq}{c^2 r^2} xy + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2 r^2}\right) x^2 - \frac{2qt}{c^2 r^2} x - \frac{2pt}{c^2 r^2} y + \frac{t^2}{c^2 r^2} - 1 = 0,$$

et en appelant A, B, C, D, E, F les coefficients successifs, on sait que pour que cette équation se réduise à un point unique : 1° $B^2 - 4AC < 0$, condition implicitement remplie, puisque cette équation représente la projection d'une courbe fermée du deuxième degré;

$$2° AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = 0,$$

qui devient ici :

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right) \frac{p^2 t^2}{c^4 r^4} + \left(\frac{q}{a^2} + \frac{p}{c^2 r^2}\right) \frac{q^2 t^2}{c^4 r^4} + \frac{p^2 q^2}{c^4 r^4} \left(\frac{t^2}{c^2 r^2} - 1\right) - \frac{2p^2 q^2 t^2}{c^6 r^6} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2 r^2}\right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2 r^2}\right) \left(\frac{t^2}{c^2 r^2} - 1\right) = 0;$$

ou, en réduisant, $t^2 = a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 r^2$.

L'équation du plan tangent à l'ellipsoïde peut donc s'écrire :

$$px + qy + rz = \sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 r^2}.$$

2° *Hyperboloïde à une nappe*. Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il suffit de changer dans les résultats précédents c en $-c$ pour avoir la nouvelle équation du plan tangent, qui sera :

$$px + qy + rz = \sqrt{a^2p^2 + b^2q^2 - c^2r^2}.$$

3° *Hyperboloïde à deux nappes*. Son équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et la nouvelle équation du plan tangent est :

$$px + qy + rz = \sqrt{a^2p^2 - b^2q^2 - c^2r^2}.$$

4° *Paraboloïde elliptique*. Dans cette surface, il ne saurait y avoir de plan tangent parallèle à l'axe ; car en faisant passer un plan par l'axe et le point de contact, il couperait la surface suivant une parabole dont l'axe serait celui même de la surface, et le plan tangent suivant une droite qui serait dès lors à la fois tangente à la parabole et parallèle à l'axe de cette courbe, ce qui est impossible. Nous mènerons donc un plan sécant coupant l'axe du paraboloïde ; l'intersection avec la surface sera une ellipse dont la projection sera aussi une ellipse. Il suffira d'exprimer que cette projection se réduit à un point unique.

Soit $sy^2 + s'z^2 = ss'x$ le paraboloïde elliptique rapporté à son axe et à son sommet, et $px + qy + rz = t$ le plan sécant ; la projection de leur intersection sera pour le plan des (x, y) :

$$psy^2 + ps'z^2 + ss'rz + ss'qy = ss't.$$

Pour que cette équation représente un point, il faut que $sr^2 + s'q^2 + pt = 0$; d'où, substituant t dans l'équation du plan, il viendra pour équation du plan tangent :

$$px + qy + rz + \frac{sr^2 + s'q^2}{4p} = 0.$$

5° *Paraboloïde hyperbolique.* Dans cette surface, il n'y a pas de plan tangent parallèle à l'axe. On s'en rendrait compte, comme précédemment, en menant un plan par l'axe et un point quelconque des deux génératrices suivant lesquelles le plan est tangent à la surface. Il faut donc faire mouvoir parallèlement à lui-même un plan sécant non parallèle à l'axe ; un tel plan coupe la surface suivant une hyperbole dont la projection peut être une hyperbole ou une droite ; dans ce dernier cas, on ne saurait exprimer par la projection que le plan devient tangent ; on évitera cette difficulté en considérant la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface, car le plan sécant ne pourra lui être perpendiculaire et la projection être une droite ; nous exprimerons donc que la projection sur le plan ZOY se réduit à deux droites.

Soit $sy^2 - s'z^2 = ss'x$ et $px + qy + rz = t$ la surface et le plan sécant ; en éliminant x , il vient :

$$psy^2 - ps'z^2 - ss'rz - ss'qy + ss't = 0,$$

équation qui représente deux droites sous la condition :

$$t = \frac{s'q^2 - sr^2}{p} ;$$

la nouvelle équation du plan tangent est donc pour ce cas .

$$px + qy + rz = \frac{sr^2 - s'q^2}{4p},$$

résultat qu'on pourrait déduire du cas du paraboloïde elliptique en changeant s' en $-s'$.

II. Pour montrer la simplification que peut apporter cette équation du plan tangent dans certains cas, nous résoudrons d'abord cette question de Monge :

Trouver le lieu décrit par le sommet d'un trièdre tri-

rectangle dont les faces restent constamment tangentes à une surface du second ordre.

Prenons un ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Les trois faces des trièdres étant tangentes à la surface, leurs équations sont :

$$(\alpha) \begin{cases} px + qy + rz = \sqrt{a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2} \\ p'x + q'y + r'z = \sqrt{a^2p'^2 + b^2q'^2 + c^2r'^2} \\ p''x + q''y + r''z = \sqrt{a^2p''^2 + b^2q''^2 + c^2r''^2} \end{cases}$$

Les axes étant rectangulaires, on a :

$$(\beta) \begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1 \\ p''^2 + q''^2 + r''^2 = 1 \end{cases}$$

Les trois plans sont perpendiculaires entre eux, ce qui donne :

$$(\gamma) \begin{cases} pp' + qq' + rr' = 0 \\ pp'' + qq'' + rr'' = 0 \\ p'p'' + q'q'' + r'r'' = 0 \end{cases}$$

L'élimination des neuf quantités

$$p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'',$$

se fait simplement en observant que les six dernières conditions équivalent à celles-ci (voir t. I, p. 388 et 497) :

$$(\gamma) \begin{cases} p^2 + p'^2 + p''^2 = 1 \\ q^2 + q'^2 + q''^2 = 1 \\ r^2 + r'^2 + r''^2 = 1 \end{cases} \quad (\gamma) \begin{cases} pq + p'q' + p''q'' = 0 \\ pr + p'r' + p''r'' = 0 \\ qr + q'r' + q''r'' = 0 \end{cases}$$

Car il suffit de faire la somme des carrés des équations (α), en ayant simplement égard aux six dernières ; il vient en effet :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

c'est-à-dire une sphère.

On trouverait de même pour un hyperboloïde, selon qu'il serait à une ou à deux nappes, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \pm b^2 - c^2$. Pour le paraboloidé elliptique les équations (α) seraient :

$$(\alpha) \begin{cases} p^2 x + pqy + prz = -\frac{1}{4} (sr^2 - s'q^2) \\ p'^2 x + p'q'y + p'r'z = -\frac{1}{4} (sr'^2 - s'q'^2) \\ p''^2 x + p''q''y + p''r''z = -\frac{1}{4} (sr''^2 - s'q''^2). \end{cases}$$

Les équations (γ) subsistent d'ailleurs toujours entre les neuf quantités $p, q, r, p', q', r', p'', q'', r''$, de sorte qu'en ajoutant les équations (α), en ayant égard aux relations (γ), il vient pour le lieu un plan $x = -\frac{1}{4} (s + s')$. Pour un paraboloidé à deux nappes, ce serait :

$$x = -\frac{1}{4} (s - s').$$

III. Comme second exemple, nous résoudrons cette question (énoncée page 516, tome V des *Nouvelles Annales*) :

Trois plans rectangulaires touchant trois surfaces confocales du second ordre, le lieu d'intersection est une sphère.

Soient les trois ellipsoïdes de révolution confocaux :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1;$$

$$* \quad \frac{x^2}{a''^2} + \frac{y^2}{b''^2} + \frac{z^2}{c''^2} = 1.$$

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 = a''^2 - b''^2 = c^2.$$

L'équation du plan tangent à l'un des ellipsoïdes est .

$$px + qy + rz = \sqrt{a^2 p^2 + b^2 (q^2 + r^2)},$$

d'après les équations (6) $q^2 + r^2 = 1 - p^2$; d'où

$$px + qy + rz = \sqrt{(a^2 - b^2)p^2 + b^2} :$$

les deux autres plans auraient pour équations :

$$\begin{aligned} p'x + q'y + r'z &= \sqrt{(a'^2 - b'^2)p'^2 + b'^2}, \\ p''x + q''y + r''z &= \sqrt{(a''^2 - b''^2)p''^2 + b''^2}, \end{aligned}$$

faisant la somme des carrés de ces équations, et ayant égard aux relations (γ), il vient : $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 + b'^2 + b''^2$.

On voit par la symétrie du calcul que les ellipsoïdes que nous avons supposés de révolution autour de l'axe focal pourraient l'être également autour du petit axe; dans ce cas la coïncidence des foyers des ellipsoïdes est remplacée par celle des circonférences que décrivent les foyers des ellipses génératrices. Les autres cas où trois surfaces du second ordre peuvent être confocales, se traiteraient d'une manière tout à fait analogue.

Note. Le théorème de Monge a été démontré la première fois par Poisson, par le moyen employé ci-dessus, en faisant usage des relations de Lagrange (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. I, p. 237; publiée en 1808). Du reste ce théorème n'est plus qu'un cas particulier du théorème sur les surfaces confocales, qu'on doit à M. Dupin et dont il est convenable de donner de suite une démonstration pour le cas général; une propriété analogue existe pour deux coniques confocales, qui, lorsqu'elles se confondent donnent lieu au théorème sur l'angle droit circonscrit à une conique, déjà connu des anciens et qu'on rencontre dans tous les traités élémentaires.

Dans nos *relations d'identité* pour les surfaces du second degré, nous indiquerons une relation entre les quatre coefficients p, q, n, t du plan tangent, pour l'équation générale, à axes quelconques de la surface, analogue à celle que nous avons donnée pour la tangente (t. II, p. 108).