

E. CATALAN

Note sur le problème de Malfatti

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 60-64

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__60_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur le problème de Malfatti.

PAR E. CATALAN.

PROBLÈME. *Inscrire dans un triangle donné, trois cercles tangents entre eux, et tangents aux côtés du triangle.*

Ce problème a été l'objet des recherches d'un assez grand nombre de géomètres. La solution qu'on va lire n'est que la *réduction* de celle qui a été donnée par M. *Lehmütz*, dans les *Annales de Gergonne* (tome X).

ABC (*Fig. 7*) étant le triangle donné ; soient, O le centre du cercle inscrit ; X, Y, Z les centres des cercles cherchés. Nommons x, y, z les rayons de ces cercles ; prenons pour unité le rayon OA' du cercle inscrit, et représentons par α, β, γ les angles AOB' = AOC', BOC' = BOA', COA' = COB' que forment, avec OA, OB, OC, les rayons menés aux points de contact B', C', A'.

Soient ensuite D, F, G le point de contact mutuel des deux cercles X, Y, et les points de contact de ces deux cercles avec AB. En menant la tangente commune DE, nous aurons, ainsi qu'il est facile de le voir, à l'aide des droites EX, EY ;

$$DE = \sqrt{x\gamma}, FG = 2\sqrt{xy}.$$

Si donc nous projetons $AXYB$ sur AB , nous aurons aussi, à cause de

$$AF = x \operatorname{tang} \alpha, BG = y \operatorname{tang} \beta, \text{ etc. :}$$

$$x \operatorname{tang} \alpha + y \operatorname{tang} \beta + 2\sqrt{xy} = \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta. \quad (1)$$

Afin d'éviter les radicaux, je prends pour inconnues auxiliaires

$$\sqrt{xy} = p, \quad \sqrt{yz} = m, \quad \sqrt{xz} = n;$$

ce qui donne :

$$x = \frac{np}{m}, y = \frac{mp}{n}, z = \frac{mn}{p}. \quad (2)$$

L'équation (1) devient par la substitution de ces valeurs :

$$\begin{aligned} p(n^2 \sin \alpha \cos \beta + m^2 \sin \beta \cos \alpha + 2mn \cos \alpha \cos \beta) \\ = mn \sin(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (3)$$

A cause de la quantité

$$n^2 \sin \alpha \cos \beta + 2mn \cos \alpha \cos \beta,$$

laquelle forme, à un facteur près, les deux premiers termes du carré de $n \sin \alpha + m \cos \alpha$, je transforme comme il suit l'équation (3) :

$$\begin{aligned} p \cos \beta (n^2 \sin \alpha + 2mn \cos \alpha) &= mn \sin(\alpha + \beta) - m^2 p \sin \beta \cos \alpha, \\ p \cos \beta (n^2 \sin^2 \alpha + 2mn \sin \alpha \cos \alpha) &= \\ mn \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) - m^2 p \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha, \\ p \cos \beta (n \sin \alpha + m \cos \alpha)^2 &= \\ mn \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) - m^2 p \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha + m^2 p \cos^2 \alpha \cos \beta. \\ &= mn \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) + m^2 p \cos \alpha \cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Mais

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ;$$

donc

$$p \cos \beta (n \sin \alpha + m \cos \alpha)^2 = mn \sin \alpha \sin \gamma - m^2 p \cos \alpha \cos \gamma. \quad (4)$$

Dans cette équation, changeons m en p , α en γ et *vice versa* ; nous aurons :

$$m \cos \beta (n \sin \gamma + p \cos \gamma)^2 = pn \sin \gamma \sin \alpha - mp^2 \cos \gamma \cos \alpha.$$

Ces deux équations donnent :

$$p^2 (n \sin \alpha + m \cos \alpha)^2 = m^2 (n \sin \gamma + p \cos \gamma)^2.$$

Extrayons les racines des deux membres, et ne considérons que les valeurs positives de m , n , p , lesquelles répondent aux cercles *intérieurs* ; nous aurons :

$$p (n \sin \alpha + m \cos \alpha) = m (n \sin \gamma + p \cos \gamma). \quad (5)$$

Un calcul semblable au précédent nous donnerait évidemment les deux autres équations suivantes, que l'on déduit de celle-ci par une permutation tournante :

$$m (p \sin \beta + n \cos \beta) = n (p \sin \alpha + m \cos \alpha), \quad (6)$$

$$n (m \sin \gamma + p \cos \gamma) = p (n \sin \beta + n \cos \beta). \quad (7)$$

En ajoutant les équations (5) et (7), et supprimant le facteur p , on a :

$$m (\cos \gamma + \sin \beta - \cos \alpha) = n (\cos \gamma + \sin \alpha - \cos \beta). \quad (8)$$

Par une transformation bien connue, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos \gamma + \sin \beta - \cos \alpha &= 4 \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{4} (\alpha + \beta - \gamma) \cos \frac{1}{4} (\beta + \gamma - \alpha) \\ &= 4 \cos \frac{1}{2} \beta \cos (45^\circ + \frac{1}{2} \gamma) \sin (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha), \end{aligned}$$

$$\cos \gamma + \sin \alpha - \cos \beta = 4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \left(45^\circ + \frac{1}{2} \gamma \right) \sin \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta \right);$$

ce qui donne, au lieu de l'équation (8)

$$\frac{m}{n} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha} \quad (9)$$

Observons actuellement que l'équation (3) peut être mise sous la forme :

$$p \left(\frac{n}{m} \operatorname{tg} \alpha + \frac{m}{n} \operatorname{tg} \beta + 2 \right) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

Si donc on remplace, dans cette dernière, le rapport $\frac{m}{n}$ par sa valeur (9), on aura successivement :

$$\begin{aligned} p \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha\right)} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right)} + 1 \right] \\ = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha\right) \right. \\ \left. + \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) \right] = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \left[\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) + \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right)^2 \right] \\ = \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right); \end{aligned}$$

ou bien, en supprimant le facteur $1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$, et remplaçant $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta$ par

$$\begin{aligned} & \left(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta\right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) : \\ p \left[1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta)\right] &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta), \\ p \left(1 + \cot \frac{1}{2} \gamma\right) &= \cot \frac{1}{2} \gamma; \end{aligned}$$

d'où enfin

$$p = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma} \quad (10)$$

On obtiendrait des valeurs analogues pour m et pour n .

La valeur de p peut se construire facilement.

On a, en effet :

$$\begin{aligned} \text{CO} + \text{OA}' - \text{CA}' &= \frac{1}{\cos \gamma} + 1 - \operatorname{tg} \gamma \\ &= \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma - 2 \sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma}{\cos^2 \frac{1}{2} \gamma - \sin^2 \frac{1}{2} \gamma} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \gamma + \sin \frac{1}{2} \gamma} = \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (\text{CO} + \text{OA}' - \text{CA}'), m = \frac{1}{2} (\text{AO} + \text{OB}' - \text{AB}'), \\ n &= \frac{1}{2} (\text{BO} + \text{OC}' - \text{BC}'). \end{aligned}$$

Note. Nous donnerons avec l'historique de ce célèbre problème, la solution géométrique de M. Steiner, qui s'applique aussi au triangle sphérique. Tm.