

AYNARD

Sur l'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des diamètres des ellipses

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5 (1846), p. 582-591

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_582_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ENVELOPPE

des perpendiculaires aux extrémités des diamètres des ellipses
(Voir p. 540).

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Considérons maintenant le cas où la quantité $2b' - a^2$ est négative. En se reportant toujours aux valeurs primitives de x et de y , on constate facilement que la courbe passe encore aux extrémités A et A', B et B' des deux axes de l'ellipse lorsque l'on suppose $\varphi = 0$, et $\varphi = 2\pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Si l'on donne à φ une valeur positive très-peu différente de zéro $\varphi = \alpha$, la valeur de y est fort petite et négative, en sorte que le point décrivant s'abaisse au-dessous de l'axe des abscisses ; en même temps la valeur de x est plus grande que a , ce qui prouve que la courbe s'éloigne à la fois des deux axes à partir du point A ; on peut facilement vérifier ce résultat en remplaçant, comme on l'a déjà fait plus haut, $\sin \alpha$ par α , et $\cos \alpha$ par $1 - \frac{\alpha^2}{2}$, et négligeant les puissances de α supérieures à la seconde. Un calcul précédent nous a montré que s'il existe un maximum pour x , il correspond à une valeur de φ , dont le cosinus est :

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{3c'^2}} \dots \dots \dots (\nu)$$

Cette valeur, inadmissible dans l'hypothèse $2b' - a^2 > 0$, est au contraire parfaitement admissible dans le cas actuel,

et détermine pour x une valeur maxima que l'on peut calculer. L'ordonnée a aussi un maximum qu'il est utile de trouver pour savoir quelle est celle des deux coordonnées qui commence le plus tôt à décroître ; cherchons donc le maximum de la valeur absolue des valeurs négatives de y , c'est-à-dire le maximum de l'expression

$$\sin \varphi [a^2 - 2b^2 - c^2 \sin^2 \varphi].$$

Après avoir multiplié par le facteur constant c , on met ce produit sous la forme :

$$(c^2 \sin^2 \varphi)' (a^2 - 2b^2 - c^2 \sin^2 \varphi),$$

et comme la somme des facteurs est constante, l'équation qui détermine la valeur cherchée est :

$$2c^2 \sin^2 \varphi = a^2 - 2b^2 - c^2 \sin^2 \varphi;$$

d'où :

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3c^2}} \dots \dots \dots (\nu).$$

Il est important de remarquer que la valeur de l'angle φ dont on vient de trouver le sinus est la même que celle qui rend x maximum ; la somme des carrés des expressions (μ) et (ν) est égale à l'unité. Lors donc que φ croît jusqu'à cette limite, la courbe s'éloigne à la fois des deux axes, puis elle se rapproche simultanément de l'un et de l'autre, lorsque φ reçoit des valeurs plus grandes. Au point c , où x et y ont atteint en même temps leur maximum, il y a nécessairement rebroussement, puisqu'une courbe algébrique ne peut avoir de points anguleux ; il restera seulement à décider si le rebroussement est de première ou de seconde espèce. Au delà du point c , la courbe rentre dans l'intérieur de l'ellipse $ABA'B'$, et elle coupe l'axe des abscisses une seconde fois ; car on trouve, en annulant l'ordonnée et en omettant la solution $\sin \varphi = 0$ déjà connue :

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{c^2}}.$$

La valeur de x correspondante est

$$x = \frac{2bc}{a}.$$

Enfin, lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la courbe passe en B à l'extrémité du petit axe, et pour des valeurs de φ plus grandes, on obtient quatre autres parties de courbes exactement semblables au quart de courbe ACMB (*fig. 52*).

Consultons maintenant le coefficient angulaire de la tangente; en se reportant à l'expression primitivement trouvée, on voit qu'il est infini en A et en A', ce qui confirme qu'en ces points comme dans le premier cas la tangente est verticale; en B et en B', elle est horizontale, puisque la valeur du coefficient angulaire s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $= \frac{3\pi}{2}$. Au point

limité dans le sens des x et des y , $\frac{dy}{dx}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; on aura sa véritable valeur en prenant la dérivée respective des deux termes, ce qui donne pour le point C :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{6c^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 3c^2 \sin^3 \varphi - (2b^2 - a^2) \sin \varphi}{6c^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 3c^2 \cos^3 \varphi - (2a^2 - b^2) \cos \varphi} \\ &= -\frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi} \cdot \frac{6c^2 \cos^2 \varphi - 3c^2 \sin^2 \varphi - (2b^2 - a^2)}{6c^2 \sin^2 \varphi - 3c^2 \cos^2 \varphi + (2a^2 - b^2)} \\ &= -\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{2a^2 - b^2}} \cdot \frac{2(2a^2 - b^2) - (a^2 - 2b^2) - (2b^2 - a^2)}{2(a^2 - 2b^2) - (2a^2 - b^2) + (2a^2 - b^2)}, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{2a^2 - b^2}} \cdot \frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}.$$

Comme l'on a, d'après l'hypothèse, $a^2 - 2b^2 > 0$, et que $2a^2 - b^2$ est toujours une quantité positive, l'expression précédente est négative, et par conséquent la tangente forme au point C un angle obtus avec la partie positive de l'axe des abscisses.

Il est nécessaire, pour déterminer si la courbe offre dans son cours des points d'inflexion, de rechercher si $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut s'annuler. Il vient, en différentiant, l'expression de $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{bD} \{ [3c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - (2a^2 - b^2) \sin \varphi] [6c^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 3c^2 \sin^3 \varphi - (2b^2 - a^2) \sin \varphi] - [3c^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi + (2b^2 - a^2) \cos \varphi] [-6c^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 3c^2 \cos^3 \varphi - (2a^2 - b^2) \cos \varphi] \},$$

expression dans laquelle on a posé :

$$D = (3c^2 \cos^2 \varphi + b^2 - 2a^2) \sin \varphi.$$

Pour savoir si $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut s'annuler, il suffit d'égaliser à zéro la quantité comprise entre les accolades, et de voir si les racines de l'équation ainsi formée sont imaginaires ; on posera donc :

$$\sin^2 \varphi [3c^2 \cos^2 \varphi - (2a^2 - b^2)] [6c^2 \cos^2 \varphi - 3c^2 \sin^2 \varphi - (2b^2 - a^2)] - \cos^2 \varphi [3c^2 \sin^2 \varphi + (2b^2 - a^2)] [-6c^2 \sin^2 \varphi + 3c^2 \cos^2 \varphi - (2a^2 - b^2)] = 0 ;$$

ou bien :

$$\sin^2 \varphi [3c^2 \cos^2 \varphi - (2a^2 - b^2)] [-9c^2 \sin^2 \varphi + 7a^2 - 8b^2] + \cos^2 \varphi [3c^2 \sin^2 \varphi + (2b^2 - a^2)] [-9c^2 \cos^2 \varphi - 7b^2 + 8a^2] = 0.$$

Introduisons la tangente à l'effet de n'avoir qu'une seule ligne trigonométrique, il vient.

$$-\frac{9c^3(2a^2-b^2)}{(2a^2-b^2)(7a^2-8b^2)} \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}^4 \varphi + 18c^4 \\ + (2b^2-a^2)(8a^2-7b^2) \\ - (2a^2-b^2)(7a^2-8b^2) \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}^2 \varphi - 9c^2(2b^2-a^2) \\ + (2b^2-a^2)(8a^2-7b^2) \\ - (2a^2-b^2)(7a^2-8b^2) \end{array} \right|$$

Cette équation revient finalement en réduisant le plus possible à la suivante :

$$(2a^2 - b^2)^2 \operatorname{tang}^4 \varphi - 4(c^4 - a^2 b^2) \operatorname{tang}^2 \varphi + (2b^2 - a^2)^2 = 0$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{2(c^4 - a^2 b^2)^2 \pm \sqrt{4(c^4 - a^2 b^2)^2 - (2a^2 - b^2)^2 (2b^2 - a^2)^2}}$$

Pour que les racines soient réelles, il faut en premier lieu que l'on ait :

$$4(c^4 - a^2 b^2)^2 - (2a^2 - b^2)^2 (2b^2 - a^2)^2 > 0. \dots (\tau),$$

condition qui revient à :

$$[2(c^4 - a^2 b^2) + (2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)][2(c^4 - a^2 b^2) - (2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)] > 0.$$

Le premier facteur se réduit à $-a^2 b^2$; donc il faut, pour que l'inégalité précédente puisse avoir lieu, que le second facteur soit négatif, c'est-à-dire que l'on ait :

$$a^4 + b^4 - \frac{11}{4} a^2 b^2 < 0;$$

ou bien :

$$\left(a^2 - \frac{11}{8} b^2\right)^2 - b^4 \left(\frac{11}{8} - 1\right)^2 < 0;$$

ou :

$$\left(a^2 - \frac{11}{8} b^2\right) - \left(b^2 \frac{\sqrt{57}}{8}\right)^2 < 0;$$

ou enfin :

$$\left(a^2 - b^2 \frac{11 + \sqrt{57}}{8}\right) \left(a^2 - b^2 \frac{11 - \sqrt{57}}{8}\right) < 0.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que a^2 doit toujours

être compris entre $b^2 \left(\frac{11 - \sqrt{57}}{8} \right)$ et $b^2 \left(\frac{11 + \sqrt{57}}{8} \right)$; or,

a^2 est évidemment plus grand que la première quantité; donc la condition (τ) revient définitivement à la suivante :

$$8a^2 < b^2 (11 + \sqrt{57}).$$

Mais il ne suffit pas que la quantité soumise au second radical dans l'expression de $\tan \varphi$ soit positive, il faut encore que la quantité soumise au premier radical le soit aussi, ce qui exige que l'on ait :

$$c^4 - a^2 b^2 > 0,$$

ou :

$$a^4 + b^4 - 3a^2 b^2 > 0.$$

Cette condition revient à :

$$\left(a^2 - \frac{3}{2} b^2 \right)^2 - \frac{5}{4} b^4 > 0;$$

ou bien à :

$$\left(a^2 - \frac{(3 + \sqrt{5}) b^2}{2} \right) \left(a^2 - \frac{(3 - \sqrt{5}) b^2}{2} \right) > 0.$$

Cette dernière inégalité exige que la valeur de a^2 soit supérieure ou inférieure à chacun des deux facteurs pour qu'ils puissent être de même signe, et comme l'on a :

$$a^2 > \frac{3 - \sqrt{5}}{2} b^2,$$

l'on devra avoir aussi :

$$a^2 > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} b^2 \dots \dots \dots (\tau)$$

On déduit de la comparaison des inégalités (τ) et (σ)

$$12 + 4\sqrt{5} < 11 + \sqrt{57},$$

inégalité absurde, qui apprend que les valeurs de $\tan \varphi$ sont

constamment imaginaires. Il s'ensuit que $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne peut s'annuler et que par conséquent la courbe est exempte d'inflexions. Ce dernier résultat fait connaître que le rebroussement qui existe au point C est du premier genre, car il y aurait au moins une inflexion si le rebroussement était de seconde espèce.

Cherchons maintenant le périmètre de la courbe : en différentiant les expressions (1) et (2) valeurs primitives de x et de y on trouve après quelques réductions faites :

$$b \sin \varphi \, dy + a \cos \varphi \, dx = 0,$$

$$b \cos \varphi \, dy - a \sin \varphi \, dx = [(2b^2 - a^2) \cos^2 \varphi + (2a^2 - b^2) \sin^2 \varphi] d\varphi ;$$

d'où l'on déduit pour la différentielle de l'arc :

$$ds = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{ab} [(2b^2 - a^2) \cos^2 \varphi + (2a^2 - b^2) \sin^2 \varphi] d\varphi.$$

Posons :

$$\text{tang} \psi = \frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi},$$

φ étant ainsi l'angle que fait avec le petit axe de l'ellipse le diamètre qui aboutit au point dont les coordonnées sont

$$x = a \cos \varphi \text{ et } y = b \sin \varphi ;$$

il viendra par une substitution qui n'offre aucune difficulté .

$$ds = \frac{ab [(2b^2 - a^2) b^2 \sin^2 \psi + (2a^2 - b^2) a^2 \cos^2 \psi] d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}},$$

d'où

$$\frac{1}{ab} s(\psi_0, \psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{[(2b^2 - a^2) b^2 \sin^2 \psi + (2a^2 - b^2) a^2 \cos^2 \psi] d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} \dots (3),$$

en désignant par $s(\psi_0, \psi_1)$ l'arc de la courbe compté entre les points correspondants aux valeurs ψ_0 et ψ_1 de l'angle ψ .

Augmentons et diminuons le second membre de l'équation (3) de l'expression

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{[(2b^2 - a^2) a^2 \cos^2 \psi + (2a^2 - b^2) b^2 \sin^2 \psi] d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}},$$

il viendra :

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} s(\psi_0, \psi_1) &= \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{(a^2 + b^2) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} \\ &- \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2a^2 b^2 d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} + \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{(a^4 \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \psi) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} \dots (4). \end{aligned}$$

D'ailleurs l'équation (4) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} s(\psi_0, \psi_1) &= \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^4 \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \psi) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} \\ &- \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{a^2 b^2 d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Rapprochant la dernière égalité de l'égalité (3) il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{(a^4 \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \psi) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} + \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{a^2 b^2 d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} &= \\ &= \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{(a^2 + b^2) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^4 \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \psi) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{a^2 b^2 d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^2 + b^2) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3a^2 b^2 d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}}$$

Donc

$$\frac{1}{ab} s(\psi_0, \psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(a^2 + b^2) d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3a^2 b^2 d\psi}{(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}},$$

ou en appelant e l'excentricité $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,

$$\frac{1}{b} s(\psi_0, \psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(2 - e^2) d\psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3(1 - e^2) d\psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}}, \dots \quad (4).$$

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{e^2 \sin \psi \cos \psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}}.$$

Différentions-la par rapport à ψ et puis intégrons entre les limites ψ_0 et ψ_1 , il viendra :

$$\frac{e^2 \sin \psi_1 \cos \psi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \psi_1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^2 \sin \psi_0 \cos \psi_0}{(1 - e^2 \sin^2 \psi_0)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{2(2 - e^2) d\psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} -$$

$$- \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{3(1 - e^2) d\psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{5}{2}}} - \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

On tire de cette dernière égalité et de l'égalité (4) :

$$\frac{1}{b} s(\psi_0, \psi_1) = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^2 \sin \psi_1 \cos \psi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \psi_1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^2 \sin \psi_0 \cos \psi_0}{(1 - e^2 \sin^2 \psi_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on fait $\psi_0 = 0$ et que l'on appelle $s(\psi_1)$ ce que devient $s(\psi_0, \psi_1)$ on a :

$$s(\psi_1) = bF(e, \psi_1) + \frac{be^2 \sin \psi_1 \cos \psi_1}{(1 - e^2 \sin^2 \psi_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est le résultat de M. Talbot. Si l'on fait en outre $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$s = 4bF(e),$$

s désignant le périmètre total de la courbe.

Ajoutons en dernier lieu que l'expression

$$\frac{be^2 \sin \psi \cos \psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}$$

représente la distance de l'extrémité du diamètre de l'ellipse qui fait un angle ψ avec le petit axe au point de la courbe correspondant ; c'est ce que l'on vérifie aisément en éliminant $x - a \cos \psi$ et $y - b \sin \psi$ entre les équations (1) et (2) et l'équation suivante :

$$r^2 = (x - a \cos \psi)^2 + (y - b \sin \psi)^2,$$

et puis remplaçant dans la valeur de r tirée de l'équation finale $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ par leurs valeurs en $\sin \psi$ et $\cos \psi$.