

ARISTIDE MARRE

Trouver la somme de toutes les permutations différentes d'un nombre donné

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 57-60

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__57_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Trouver la somme de toutes les permutations différentes d'un
nombre donné.*

PAR M. ARISTIDE MARRE,

Soldat au 71^e régiment de ligne.

Soit en général N un nombre composé de n chiffres ; trois cas peuvent se présenter : ou ces n chiffres sont tous différents , ou parmi eux il y en a p d'une espèce , q d'une autre espèce , etc. , ou bien le nombre proposé est composé avec un seul et même chiffre.

1^{er} cas. Soit $n....dcba$ le nombre proposé de n chiffres différents ; il fournira , comme on le sait , $1.2.3....n$ permutations. Or , dans l'addition de ces $1.2.3....n$ nombres , il est facile de voir : 1° que toutes les colonnes verticales donneront une même somme partielle , prise en valeur absolue ; 2° que

cette somme constante en valeur absolue, n'est autre chose que la somme des chiffres du nombre proposé, multipliée par le nombre des permutations de $(n-1)$ lettres. D'où il résulte que les sommes partielles des diverses colonnes verticales sont :

$$\begin{aligned} (a+b+c+d+\dots+n) [1.2.3\dots(n-1)] &\text{ pour la } 1^{\text{re}} \text{ à droite,} \\ (a+b+c+d+\dots+n) [1.2.3\dots(n-1)] \times 10 &\text{ pour la } 2^{\text{e}}, \\ (a+b+c+d+\dots+n) [1.2.3\dots(n-1)] \times 10^2 &\text{ pour la } 3^{\text{e}}, \\ &\vdots \\ (a+b+c+d+\dots+n) [1.2.3\dots(n-1)] \times 10^{n-1} &\text{ pour la } n^{\text{ieme}} \text{ ou} \\ &\text{dernière,} \end{aligned}$$

et que la somme demandée peut s'écrire :

$$\frac{1.2.3\dots n}{n} (a+b+c+d+\dots+n) (1+10+10^2+10^3+\dots+10^{n-1}) ;$$

ou bien, en désignant par s la somme des chiffres du nombre proposé, et en observant que le quotient $\frac{10^n-1}{10-1}$, équivalent au dernier facteur entre parenthèse, est un nombre composé de n chiffres tous égaux à 1, on arrive à la formule :

$$S = \frac{1.2.3\dots n}{n} \times s \times 1111 \dots \text{ (en nombre } n).$$

Exemple : Soit proposé de trouver la somme des permutations différentes du nombre 1846. Nous aurons :

$$S = \frac{1.2.3.4}{4} . 19 . 1111 = 114 \times 1111 = 126654.$$

2^e cas. Si le nombre donné n'a pas tous ses n chiffres différents, il faut alors remarquer que le nombre des permutations n'est plus $1.2.3\dots n$ pour n lettres ; mais ce produit divisé par $1.2.3\dots p$, s'il y a p de ces n lettres semblables,

ou divisé par $1.2.3....p \times 1.2.3....q$, s'il y en a p d'une espèce, q d'une autre, etc.

Soit proposé, par exemple, de trouver toute la somme des permutations différentes de 22211.

La formule donnera :

$$S = \frac{x.x.x.4.x}{x \times 1.2.x \times x.x} \times 8 \times 11111 = 177776.$$

3^e cas. Supposons enfin que le nombre proposé soit composé avec un seul et même chiffre. Dans ce cas, $p = n$.

Soit le nombre 55555 dont on demande la somme des permutations. Il est évident à priori que cette somme n'est autre chose que le nombre lui-même. La formule donne un résultat parfaitement identique avec celui-ci ; elle conduit à :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1.2.3.4.5.6}{6 \times 1.2.3.4.5.6} \cdot 30 \cdot 11111, \\ &= 5 \times 11111 = 55555. \end{aligned}$$

II. Les Hindous rangeaient, parmi leurs règles d'arithmétique, la règle qui donne le moyen de trouver la somme des permutations dont tous les chiffres sont différents (1^{er} cas), et M. Reuben Barrow nous a conservé l'énoncé suivant :

Place au-dessus des chiffres du nombre donné une progression arithmétique commençant par 1, au rang des unités, et allant en croissant d'une unité : divise le produit des termes de cette progression par le nombre des chiffres qui entrent dans le nombre proposé : multiplie la somme des chiffres de ce même nombre par le quotient ainsi obtenu ; et ce produit, écris-le autant qu'il y a de chiffres dans le nombre donné, en le reculant successivement d'un rang vers la droite ; la somme de ces lignes est la somme de toutes les permutations.

Exemple déjà cité : 1846.

$$\begin{array}{r}
 4321 \\
 1846 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
 \hline
 4
 \end{array}
 \cdot 19 = 114
 \quad
 \begin{array}{r}
 114 \\
 114 \\
 114 \\
 114 \\
 \hline
 \end{array}
 \cdot$$

$S = 126654$