

ABEL TRANSON

Analogies du cercle et de l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 535-539

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_535_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_535_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALOGIES

du cercle et de l'hyperbole équilatère.

PAR ABEL TRANSON.

La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du cercle sur un diamètre est moyenne géométrique entre les deux segments de ce diamètre. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère sur son axe transverse est également une moyenne géométrique entre les deux segments de cet axe. Ainsi les deux courbes se trouvent réunies dans une même définition ; seulement l'ordonnée du cercle est moyenne entre deux segments *additifs* ; celle de l'hyperbole équilatère entre deux segments *sous-tractifs*.

De là , entre les deux courbes , de nombreuses analogies qui ont fait proposer quelquefois de substituer à la dénomination un peu longue d'hyperbole équilatère celle d'*hypercycle*, ou , par contraction, *hypercle*.

L'hyperbole équilatère, tournant autour de l'un ou l'autre de ses axes, engendre un solide à une nappe ou à deux nappes. L'un et l'autre de ces solides ont aussi avec la sphère des analogies qui autorisent à les désigner sous les noms d'*hypersphéroïde* à une ou à deux nappes. Certaines questions sur la sphère conduisent à des circonstances de calcul dont l'explication exige la connaissance de ces analogies. J'en donnerai un exemple.

Dans ce qui va suivre , j'ai supprimé , pour abrégër, la

plupart des démonstrations. Je me borne à dire qu'elles dépendent exclusivement des méthodes qui sont admises dans l'enseignement de la géométrie élémentaire.

I. La détermination de l'hyperbole, comme celle du cercle, dépend d'un seul paramètre. C'est le demi-axe transverse que j'appellerai aussi le *rayon*.

II. La tangente au cercle est perpendiculaire à la ligne qui joint le centre au point de contact, et la tangente à l'hypercycle a une direction antiparallèle à cette même perpendiculaire. Pour constater cette analogie, il faut rapporter la situation de ces deux lignes (la tangente à l'hyperbole et la perpendiculaire à la ligne centrale) à l'un des deux axes de la courbe.

III. Dans l'une et l'autre courbe, la distance du centre à une tangente quelconque multipliée par la distance de ce même centre au point de contact correspondant, donne un produit constant (égal au carré du rayon).

IV. Concevons dans l'une ou l'autre courbe un secteur central, c'est-à-dire un secteur formé par un arc de courbe et les deux lignes centrales aboutissant aux deux extrémités de cet arc. Soit R le rayon de la courbe et h la projection de l'arc sur l'axe de la courbe. Si le secteur fait une révolution autour de l'axe, il engendrera un solide, c'est-à-dire un secteur sphérique ou hypersphérique, ayant pour mesure

$$V = \frac{2}{3} \pi R' h.$$

Cette expression, bien connue pour le secteur sphérique, est commune aux secteurs de l'hypersphéroïde à une ou à deux nappes. Il faut seulement bien entendre que h est la projection de l'arc sur l'axe de révolution. D'ailleurs la démonstration se fera à l'aide des propositions II et III, et précisément comme pour la sphère.

V. De l'expression ci-dessus du secteur il est facile de déduire la mesure du segment à deux bases parallèles, c'est-à-dire du segment limité par deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution.

Je vais donner le calcul de cette déduction pour le solide sphérique.

Soient (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des points extrêmes de l'arc entre les deux bases. Le volume du segment sera :

$$W = \frac{2}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{2} \pi (x'' y''^2 - x' y'^2).$$

Je remplace, dans cette expression,

$$x'' y''^2 - x' y'^2 \text{ par } R^2 h - (x''^2 + x' x'' + x'^2) h;$$

et en même temps

$$R^2 \text{ par } \frac{x'^2 + y'^2 + x''^2 + y''^2}{2};$$

et il vient immédiatement :

$$W = \pi h \frac{y'^2 + y''^2}{2} + \frac{1}{6} \pi h^3,$$

ce qui est bien l'expression du segment sphérique, c'est-à-dire *la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, plus la solidité de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre.*

En appliquant convenablement le même calcul au segment de l'hypersphéroïde à une ou à deux nappes, on trouve qu'un tel segment a pour mesure *la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur, moins la solidité de la sphère dont cette même hauteur est le diamètre.*

VI. On sait transformer une sphère en un ellipsoïde à axes inégaux en faisant croître proportionnellement les dimensions dans deux directions perpendiculaires. Le volume ou les portions du volume transformé croissent dans des rap-

ports faciles à déterminer ; de sorte que le volume total de l'ellipsoïde , ou le volume d'un segment d'ellipsoïde , peuvent être calculés facilement sans sortir des méthodes élémentaires ; il n'est pas même nécessaire que les deux bases du segment soient perpendiculaires à l'un des axes de la surface : il suffit qu'ils soient parallèles.

Semblablement, on pourra, sans recourir aux méthodes du calcul infinitésimal, construire le volume d'un segment à deux bases parallèles dans l'*hyperboloïde* quelconque à une ou deux nappes.

VII. Pour montrer, par un exemple simple, l'utilité de ces analogies, je supposerai qu'on ait à résoudre ce problème de géométrie élémentaire.

Problème. « Retrancher d'une sphère donnée un segment » à une seule base qui soit au cylindre de même base et de » même hauteur dans le rapport de m à 1. »

Si R est le rayon de la sphère, γ , le rayon de base du segment cherché, et h sa hauteur, l'équation immédiate de la question est

$$\pi \frac{\gamma^2}{2} h + \frac{1}{6} \pi h^3 = m \pi \gamma^2 h,$$

d'où on déduit .

$$h = \frac{3(2m-1)}{3m-1} R.$$

La possibilité de la question semble exiger que cette valeur de h soit positive, et pour cela m doit être moindre que $\frac{1}{3}$, ou plus grand que $\frac{1}{2}$.

Cependant si le rapport m recevait une valeur intermédiaire aux fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, la valeur négative de h donnée par la formule précédente serait la hauteur du segment d'*hypersphéroïde* (à deux nappes) qui satisferait à la question.

Note. Les fonctions relatives à l'*hyperbole équilatère* se présentent dans beaucoup de questions de physique et d'astronomie, et sont devenues d'une application numérique facile, grâce aux récents travaux de M. Gudermann sur les *fonctions potentielles*. C'est le nom que cet auteur donne aux lignes trigonométriques circulaires et hyperboliques. Il désigne les premières par des lettres latines, et les dernières par des lettres initiales gothiques. Soit $u^x = P + Q$; $u^{-x} = P - Q$; u étant une base, alors P et Q sont des *fonctions potentielles* de x , et $P = \mathfrak{C}os\ x$; $Q = \mathfrak{S}in\ x$; $\frac{Q}{P} = \mathfrak{T}ang.\ x$. Si $u = e$, alors

$$\mathfrak{C}os\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathfrak{S}in\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{et si } x = xi = x \sqrt{-1},$$

alors $\mathfrak{C}os\ ix = \cos\ x$, et réciproquement $\cos\ ix = \mathfrak{C}os\ x$. M. Gudermann a calculé des tables, insérées dans le Journal de Crell (du tome VII au tome XI), pour toutes les fonctions trigonométriques hypercirculaires. Sans doute qu'on publiera un jour ces tables à part. Huyghens avait proposé de nommer les courbes exponentielles *hypertranscendantes*, et Jean Bernoulli, premier auteur de tout ce que nous savons sur les exponentielles, lui demande pourquoi *hyper* plutôt que *hypo* (*Op. omnia*, t. I, p. 180)? de même pourquoi l'hyperbole équilatère serait-elle un hypercycle plutôt qu'un hypocycle? Il est vrai que la contraction *hypercle* convient aux deux locutions; d'ailleurs ces courbes appartiennent à la grande famille des courbes binômes $y^m \pm x^m = a^m$, que M. Lamé a étudiées dans son excellent opuscule sur les *méthodes*, et lorsque m est pair, les deux signes donnent, le positif une courbe finie, et le négatif une courbe infinie, entre lesquelles existent des analogies fondées sur la théorie des imaginaires; lorsque m est impair, les deux signes donnent la même courbe, à la position près. Tm.