

MENTION

Composition écrite proposée à Paris aux examens pour l'École polytechnique en 1846

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5 (1846), p. 521-525

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_521_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_521_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPOSITION ÉCRITE

*proposée à Paris aux examens pour l'École polytechnique
en 1846.*

PAR M. MENTION,
élève en spéciales.

Lieu des points tels que leurs polaires relatives à trois cercles donnés concourent en un même point (voir t. IV, p. 665).

Je prends pour axe des x la ligne joignant les centres des deux cercles (R, r) , et la perpendiculaire abaissée du troisième centre sur cette ligne pour axe des y (fig. 53). Alors les équations des trois cercles sont :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 &= 0, \\x^2 + y^2 - 2\alpha'x + \alpha'^2 - r^2 &= 0, \\x^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r'^2 &= 0.\end{aligned}$$

Les équations des polaires d'un point x', y' , par rapport à chacun de ces cercles, sont :

$$\begin{aligned}yy' + x(x' - \alpha) - \alpha x' + \alpha^2 - R^2 &= 0; (a, b), \\yy' + x(x' - \alpha') - \alpha' x' + \alpha'^2 - r^2 &= 0; (a', b'), \\y(y' - \beta) + xx' - \beta y' + \beta^2 - r'^2 &= 0; (a'', b'').\end{aligned}$$

On a la relation $(a - a')(b - b'')(b - b')(a - a'') = 0$

$$\begin{aligned}a &= -\frac{x' - \alpha}{y'}; & b &= \frac{\alpha x' + R^2 - \alpha^2}{y'}; \\a' &= -\frac{x' - \alpha'}{y'}; & b' &= \frac{\alpha' x' + r^2 - \alpha'^2}{y'}; \\a'' &= -\frac{x'}{y' - \beta}; & b'' &= \frac{\beta y' + r'^2 - \beta^2}{y' - \beta}.\end{aligned}$$

remplaçant a, a', a'', b, b', b'' par leurs valeurs, il vient l'équation

$$(\alpha - \alpha') [(ax' + R^2 - a^2)(y' - \beta) - (\beta y' + r'^2 - \beta^2)y'] = \\ = (x'(\alpha - \alpha') + R^2 - r'^2 + \alpha'^2 - \alpha^2)(\alpha y' + \beta x' - \alpha\beta);$$

en supprimant les accents, il vient l'équation du lieu cherché :

$$(\alpha - x') [(ax + R^2 - x^2)(y - \beta) - (\beta y + r'^2 - \beta^2)y] - \\ - (x(\alpha - \alpha') + R^2 - r'^2 + \alpha'^2 - \alpha^2)(\alpha y + \beta x - \alpha\beta) = 0.$$

Or l'on sait, sans effectuer, que les termes en xy se détruisent, et que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux et de même signe. Donc le lieu cherché est un cercle.

Pour avoir la position du centre, je vais avoir recours aux dérivées par rapport à x et à y de l'équation.

Dérivée par rapport à y :

$$(R^2 - \alpha^2 - 2\beta y - r'^2 + \beta^2)(\alpha - x') - \alpha(R^2 - r'^2 + \alpha'^2 - \alpha^2) = 0.$$

Dérivée par rapport à x :

$$-2\beta x(\alpha - \alpha') - \beta(R^2 - r'^2 + \alpha'^2 - \alpha^2) = 0.$$

De la seconde on tire $x = -\frac{R^2 - r'^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{2(\alpha - \alpha')}$. Mais si

nous retranchons les équations des deux premiers cercles, nous obtenons pour équation de l'axe radical :

$$2(\alpha - x + x + \alpha'^2 - \alpha^2 + R^2 - r'^2) = 0.$$

Donc, déjà ce centre est sur l'axe radical des cercles R et r .

Je vais chercher son y pour fixer sa position ; et d'abord la dérivée par rapport à y devient :

$$-2\beta y(\alpha - \alpha') + (R^2 - \alpha^2 - r'^2 + \beta^2)(\alpha - x') - \\ - \alpha(R^2 - r'^2 + \alpha'^2 - \alpha^2) = 0;$$

d'où

$$y = \frac{(R^2 - \alpha^2 - r'^2 + \beta^2)(\alpha - \alpha') - \alpha(R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2)}{2\beta(\alpha - \alpha')}.$$

Mais l'axe radical du dernier et du premier cercle a pour équation :

$$2\beta y = 2\alpha x + R^2 - r'^2 - \alpha^2 + \beta^2,$$

et si dans cette équation on remplace x par

$$-\frac{R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{2(\alpha - \alpha')},$$

c'est-à-dire si on fait concourir les deux axes radicaux, on obtient :

$$2\beta y = \frac{-\alpha(R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2) + (R^2 - r'^2 - \alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \alpha')}{\alpha - \alpha'},$$

c'est-à-dire l'ordonnée du centre...

Donc ce cercle a pour centre le centre radical des trois cercles donnés.

Pour avoir son rayon, soient A, B les coordonnées du centre radical ; alors l'équation du cercle sera :

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = X^2,$$

ou faisant $y = 0$, $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2 = X^2$;

je vais alors chercher à avoir $x^2 - 2Ax$; pour cela je fais $y = 0$ dans l'équation du cercle, et j'observe que

$$-\frac{R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{(\alpha - \alpha')} = 2A ;$$

alors il vient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta(\alpha x + R^2 - \alpha^2)}{\beta(\alpha - \alpha')} = \\ & = \frac{x(\alpha - \alpha') + R^2 - r^2 + \alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha - \alpha'} = x - 2A ; \end{aligned}$$

ou $-R^2 + \alpha^2 = x^2 - 2Ax + 2Ax$;

donc $\alpha^2 - R^2 - 2A\alpha = x^2 - 2Ax$,

et par suite $X^2 = A^2 + B^2 + \alpha^2 - 2A\alpha$.

Or cette valeur de X n'est autre que la longueur de la tangente aux cercles issue du centre radical, car T étant cette tangente, l'on a $T^2 =$ (la distance du centre radical au centre du cercle R)² — R^2 . Or le carré de cette distance est

$$B^2 + (A - \alpha)^2 = B^2 + A^2 - 2A\alpha + \alpha^2;$$

donc
$$T^2 = B^2 + A^2 + \alpha^2 - 2A\alpha - R^2.$$

Il est donc enfin établi que le lieu cherché est la circonférence orthogonale aux trois. Il peut être construit alors aisément (le centre et le rayon étant déterminés).

Note. On peut abrégé. Dès qu'il est démontré que le centre cherché est sur l'axe radical de deux quelconques de ces cercles, il est évident qu'il se confond avec le centre radical des trois cercles; et les calculs se simplifient en prenant le centre radical pour origine des coordonnées. Les équations des trois cercles prennent alors la forme

$$\begin{aligned} x^2 - 2\beta x + x^2 - 2\gamma x &= \gamma^2; & x^2 - 2\beta' x + x^2 - 2\gamma' x &= \gamma'^2; \\ x^2 - 2\beta'' x + x^2 - 2\gamma'' x &= \gamma''^2; \end{aligned}$$

et l'on trouve pour lieu du point, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

or $\gamma^2 = R^2 - \alpha^2 - \beta^2 = r^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 = r'^2 - \alpha''^2 - \beta''^2$;

donc si γ^2 est positif, c'est-à-dire si le centre radical est dans l'intérieur des cercles, le problème est impossible; et si γ^2 est négatif, ou si le centre radical est extérieur aux cercles, alors le lieu est tel qu'on l'a trouvé ci-dessus, et le lieu du point d'intersection des polaires est une ligne du quatrième degré donné par l'équation

$$\begin{aligned} & [x^2(\beta - \beta') + xy(\alpha - \alpha') + x(\alpha'\beta - \alpha\beta' + \gamma^2(\beta - \beta'))^2 + \\ & + [x^2(\gamma - \gamma') + xy(\beta - \beta') + y(\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma^2(\beta' - \beta))^2 \\ & + \gamma^2[\gamma(\alpha - \alpha') + x(\beta' - \beta) + \alpha'\beta - \alpha\beta']^2 = 0; \end{aligned}$$

il est à remarquer que $\gamma(\alpha - \alpha') + x(\beta' - \beta) + \alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$ est l'équation de la droite qui passe par les centres des cer-

cles R, r ; en prenant l'axe des x parallèle à cette droite, l'on a $\beta = \beta'$, et l'équation de la courbe se réduit à cette forme :

$$(x^2 + y^2)(x^2 + \beta^2) + \gamma^2(y - \beta)^2 = 0,$$

ligne qui, n'ayant pas d'asymptotes, est fermée ou composée de branches fermées. Un seul cas échappe à cette méthode : c'est celui où les trois centres sont sur une même droite ; le centre radical étant à l'infini, on ne peut le prendre pour origine ; mais alors la droite des centres est évidemment le lieu cherché.

Tm.