

**Examen mathématique pour obtenir
le titre de fellow (socius) à l'université
de Dublin, en 1842**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 515-520

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__515_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXAMEN MATHÉMATIQUÉ

*pour obtenir le titre de fellow (socius) à l'Université de
Dublin, en 1842.*

Ce titre correspond à peu près à celui d'agrégé.

1. Étant donnée la base d'un triangle, le produit de deux côtés étant égal au carré de la moitié de la base, le lieu du sommet est une lemniscate de Bernoulli.

2. L'arc d'une lemniscate vulgaire s'exprime en fonction elliptique de première espèce.

3. Soient données deux courbes dans le même plan, et telles que si d'un point P, situé sur la courbe extérieure, menant deux tangentes touchant la courbe intérieure en A et B, la normale en P divise constamment en parties égales l'angle formé par les tangentes; alors la différence entre la somme des tangentes PA + PB et l'arc AB intercepté est une quantité constante.

4. Le même théorème subsiste lorsque les deux courbes sont sur une surface quelconque, les deux tangentes étant des lignes géodésiques.

5. Si la courbe intérieure est une ellipse plane, l'autre sera une ellipse confocale.

6. Si la courbe intérieure est une ellipse sphérique, quelle sera l'autre courbe?

7. Quel est le plus grand nombre de tangentes qu'on peut mener à une ligne de l'ordre n ?

8. Si deux courbes se coupent mutuellement, il existe des

équations de condition entre les coordonnées des points d'intersection.

9. Si deux courbes du troisième ordre se coupent en neuf points ; par huit quelconques de ces points, le neuvième est déterminé.

10. Il existe une relation d'identité remarquable entre les différences de quatre quantités ; savoir :

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(d - b) + (a - d)(b - c) = 0.$$

11. Cette relation subsiste, si on remplace les différences par les sinus des différences.

12. Trois droites ne se coupant pas déterminent un parallépipède unique.

13. Etant donné un point P extérieur à un ellipsoïde, trouver un point intérieur Q tel qu'en menant par ce point un plan *quelconque* coupant la surface suivant une ellipse, la droite PQ soit un axe principal du cône ayant cette ellipse pour base et le point P pour sommet.

14. Une courbe quelconque tourne dans un plan sur une autre courbe fixe ; un point quelconque pris dans le plan de la première décrira une troisième courbe.

15. Une courbe finie étant donnée, on cherche le lieu des intersections des tangentes rectangulaires ; on fait de même pour cette seconde courbe, et ainsi de suite ; la forme de la dernière courbe à l'infini est une cycloïde.

16. Trois plans rectangulaires touchant trois surfaces con-focales du second ordre, le lieu d'intersection est une sphère.

17. Comment trouver l'équation qui a pour racines les valeurs maxima ou minima d'une fonction donnée ?

18. Une fonction rationnelle de degré pair a un minimum absolu ; quelles sont les limites de ce minimum ?

19. Si $\varphi(x+y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$; alors $\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy}$.

20. Si $\varphi(x+y\sqrt{-1}, x'+y'\sqrt{-1}, x''+y''\sqrt{-1}, \dots) = U + V\sqrt{-1}$; alors $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx'} + \frac{dU}{dx''} + \dots = \frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} + \frac{dV}{dy''} \dots$

21. La valeur minimum d'une fonction, pour une valeur réelle de la variable, peut encore être diminuée en augmentant la variable d'une quantité imaginaire.

22. Les fonctions réelles de quantités imaginaires n'ont ni maximum ni minimum.

23. Une fonction réelle impaire n'a ni maximum ni minimum absolu.

24. Condition du maximum ou du minimum pour une fonction à deux variables.

25. Qu'arrive-t-il lorsque, dans ce cas, la quantité qui doit conserver le même signe est un carré parfait ?

26. Eclaircir ce qui précède par la théorie des surfaces.

27. Trouver les conditions du maximum ou du minimum s'il y a trois variables ou davantage.

28. Intégrer l'équation

$$(a + mx + ny) dy + (a + m'x + n'y) dy = 0.$$

29. Critérium d'intégrabilité d'une équation différentielle entre trois variables.

30. Si l'équation ne satisfait pas à ce critérium, quelle est la nature de la relation entre les trois variables ?

31. Comment alors faut-il intégrer l'équation ?

32. Critérium d'intégrabilité pour quatre variables.

33. Quelles sont les équations de condition pour ces variables ?

34. Si l'on a quatre variables, et qu'aucune équation de condition ne soit satisfaite, quelle sera l'intégrale ?

35. L'intégrale peut, dans ce cas, être ramenée au système de deux équations.

36. Est-il nécessaire qu'une équation différentielle du second ordre entre plusieurs variables ait une équation primitive ?

37. L'équation $dz^2 = m^2(dx^2 + dy^2)$ a-t-elle une équation primitive ? Pourquoi pas ?

38. Comment intégrer cette équation ?

39. Intégrer $px + qz + y = 0$.

40. Intégrer $pqz + qxz = xy$.

41. Intégrer cette équation entre quatre variables :

$$(x + y + z) \frac{dy}{du} + (u + y + z) \frac{dz}{dx} + (u + x + z) \frac{dz}{dy} = u + x + y.$$

42. Intégrer

$$t \frac{dz}{dt} + u \frac{dz}{du} + x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = uz.$$

43. Comment faut-il en général intégrer les équations aux différences partielles qui passent le premier degré ?

44. Méthode de Charpit.

45. Par quelle substitution peut-on réduire à une fonction elliptique l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + 2abx^2 \cos \varphi + b^2x^4}}$?

46. L'intégrale $\int_{\Delta^3} \frac{d\theta}{\Delta^3}$ ou $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}$ exprime un arc d'ellipse ; θ est l'angle de la normale et d'un axe fixe ; comment cela résulte-t-il géométriquement ?

47. Comment faut-il chercher la formule de réduction

pour l'intégrale $\int \frac{\sin^m \theta d\theta}{\Delta}$? en différentiant quelle certaine fonction ?

48. Réduction de l'intégrale $\int \frac{Rd\theta}{\Delta}$ quand R est fractionnaire.

49. Formule qui sert à opérer l'addition et la soustraction des fonctions elliptiques de la seconde espèce ; comment la déduire de la trigonométrie sphérique ?

50. Formule analogue pour les fonctions de la première espèce ; comment la déduire de la première ?

51. L'amplitude de la somme ou de la différence des deux fonctions F est la somme ou la différence de deux certains arcs.

52. De quelle courbe la fonction F exprime-t-elle l'arc ?

53. Quand le module diffère très-peu de l'unité, comment trouver la valeur de la fonction *complète* F ?

54. Dans le même cas, on demande la valeur de la fonction *complète* E.

55. Ramener aux fonctions elliptiques l'intégrale

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}}$$

56. Ramener aux fonctions elliptiques

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4 + dx^6}}$$

57. Transformation de Lagrange pour le calcul des fonctions elliptiques.

58. Relation qu'on en déduit entre la fonction F.

59. Cette relation peut se démontrer facilement par la géométrie.

60. La fonction F peut s'exprimer par l'arc de deux ellipses.

61. Un arc d'hyperbole peut s'exprimer par les fonctions F et E .

62. Au moyen de quelle formule ajoute-t-on et retranche-t-on les arcs d'hyperbole ?

63. Comment démontre-t-on géométriquement le théorème de Landen sur la relation entre les arcs d'ellipse et les arcs d'hyperbole ?

64. Théorème remarquable de Jacobi pour la transformation de la fonction F .

65. La démonstration de ce théorème peut-être suggérée par un théorème analogue sur le cercle.

66. La valeur de la fraction déduite de cette analogie ne surpasse jamais l'unité (abstraction faite des signes).

67. Comment en déduit-on une relation entre les amplitudes ?

68. On peut découvrir la relation entre les amplitudes par une certaine propriété de l'équation différentielle.

69. Donner la démonstration du théorème de Jacobi.

70. La relation entre les amplitudes devient plus simple à l'aide d'une certaine transformation.

71. Relation remarquable entre les fonctions complètes F et E , lorsque les modules sont complémentaires.

72. Bissecter la fonction elliptique π ; quels sont les caractères analytiques ?

73. Quels sont les problèmes de la géométrie et de la mécanique où l'on rencontre la fonction π avec un paramètre circulaire.

(La mécanique et la physique prochainement.)