

GUILMIN

Note sur la résolution des équations trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 49-56

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur la résolution des équations trigonométriques.

PAR M. GUILMIN,

Ancien élève de l'École normale.

I. En cherchant l'une des lignes trigonométriques de l'arc $\frac{a}{n}$, en fonction de la même ligne de l'arc a , n étant un nombre entier, on est conduit à résoudre une équation du degré n au moins ; cependant une seule racine de l'équation convient pour la n^{e} partie de l'arc donné a . Comment distinguer cette racine pour ne s'occuper que de sa détermination ?

On peut observer la règle suivante, évidemment applicable à toutes les lignes trigonométriques.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le sinus de $\frac{324^{\circ}}{9}$, connaissant le sinus de 324° .

Une discussion connue nous apprend que les racines de l'équation du neuvième degré à laquelle on parvient, sont les sinus de neuf arcs formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{324^{\circ}}{9} = 36^{\circ}$, et la raison $\frac{2\pi}{9} = 40^{\circ}$. Ces arcs sont donc

$36^{\circ}, 76^{\circ}, 116^{\circ}, 156^{\circ}, 196^{\circ}, 236^{\circ}, 276^{\circ}, 316^{\circ}, 356^{\circ}$.

Je les ramène au premier quadrant ; ce qui donne pour leurs sinus

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ; \quad \sin 156^\circ &= \sin 24^\circ; \quad \sin 276^\circ = -\sin 84^\circ \\ \sin 76^\circ; \quad \sin 196^\circ &= -\sin 16^\circ; \quad \sin 316^\circ = -\sin 44^\circ \\ \sin 116^\circ &= \sin 64^\circ; \quad \sin 236^\circ = -\sin 56^\circ; \quad \sin 356^\circ = -\sin 4^\circ. \end{aligned}$$

Ce tableau fait voir que l'équation du neuvième degré doit avoir dans notre exemple quatre racines positives, dont l'une est le sinus de $\frac{324^\circ}{9}$ ou 36° . Cet arc est le deuxième dans l'ordre de grandeur parmi les arcs du premier quadrant qui correspondent à ces racines. On calculera donc pour $\sin 36^\circ$ la deuxième des racines positives de l'équation trouvée et séparées dans l'ordre des grandeurs croissantes.

II. Prenons pour deuxième exemple la recherche de $\tan \frac{a}{6}$ en fonction de $\tan a$. On arrive à une équation du sixième degré, dont les racines correspondent à six arcs, formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{a}{6}$, et la raison $\frac{\pi}{6}$ ou 30° .

Soit

$$a = 306^\circ; \quad \frac{a}{6} = 51^\circ;$$

Les arcs indiqués sont ici

$$51^\circ, 81^\circ, 111^\circ, 141^\circ, 171^\circ, 201^\circ.$$

Je les ramène au premier quadrant; ce qui donne en considérant la tangente

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 51^\circ; \quad \operatorname{tg} 141^\circ &= -\operatorname{tg} 39^\circ \\ \operatorname{tg} 81^\circ; \quad \operatorname{tg} 171^\circ &= -\operatorname{tg} 9^\circ \\ \operatorname{tg} 111^\circ &= -\operatorname{tg} 69^\circ; \quad \operatorname{tg} 201^\circ = \operatorname{tg} 21^\circ. \end{aligned}$$

Ce tableau nous apprend que l'équation trouvée du sixième degré a trois racines positives, et trois négatives. Les trois racines positives correspondent aux arcs, dont la tangente

ne change pas de signe, quand on les ramène au premier quadrant. 51° est l'un de ces arcs, et il est le deuxième, par ordre de grandeur, parmi les arcs du premier quadrant ainsi obtenus; sa tangente est donc la deuxième dans l'ordre des grandeurs des racines positives de l'équation du sixième degré.

III. La même méthode sert à déterminer la racine convenable dans les questions de ce genre. Trouver $\cos \frac{3}{7} a$, connaissant $\cos a$.

Je vais indiquer d'abord la marche à suivre pour trouver l'équation du problème. Soit posé $\cos 3 \frac{a}{7} = x$.

On a d'abord

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a = b'.$$

On emploie ensuite la formule de Moivre qui donne $\cos 7a$ en fonction de $\cos a$, ou bien $\cos a$ en fonction de $\cos \frac{a}{7}$; on a ainsi une équation

$$b' = f(x). \quad (1)$$

du septième degré en x , et dont toutes les racines sont réelles. En répétant une discussion connue, on trouverait que ces racines correspondent à sept arcs, formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{3a}{7}$, et la raison $\frac{2\pi}{7}$.

Il suffit de bien remarquer que le cosinus b' est le cosinus de $3a$, ou de $2n\pi \pm 3a$.

Soit

$$a = 294^\circ; \quad \frac{3a}{7} = 126^\circ, \quad \frac{2\pi}{7} = 51^\circ \frac{3}{7}.$$

Les sept termes de la progression arithmétique indiquée sont :

$$126^{\circ}, 177^{\circ} \frac{3}{7}, 228^{\circ} \frac{6}{7}, 280^{\circ} \frac{2}{7}, 331^{\circ} \frac{5}{7}, 383^{\circ} \frac{1}{7}, 434^{\circ} \frac{4}{7}.$$

Je les ramène au premier quadrant , et je trouve en considérant le cosinus

$$\begin{aligned} \cos 126^{\circ} &= -\cos 54^{\circ} \\ \cos 177^{\circ} \frac{3}{7} &= -\cos 2^{\circ} \frac{4}{7} \\ \cos 228^{\circ} \frac{6}{7} &= -\cos 48^{\circ} \frac{6}{7} \\ \cos 280^{\circ} \frac{2}{7} &= \cos 79^{\circ} \frac{5}{7} \\ \cos 331^{\circ} \frac{5}{7} &= \cos 28^{\circ} \frac{2}{7} \\ \cos 383^{\circ} \frac{1}{7} &= \cos 23^{\circ} \frac{1}{7} \\ \cos 434^{\circ} \frac{4}{7} &= \cos 74^{\circ} \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

L'équation $b' = f'(x)$ a trois racines négatives , et quatre positives ; le cosinus de 126° est une des premières , la plus petite des trois en valeur absolue ; on séparera donc les racines négatives de l'équation , et on calculera la plus petite des trois.

Il peut arriver dans un pareil calcul que l'expression de l'arc multiple ma , contienne sous un radical carré la ligne trigonométrique de l'arc simple a .

Soit , par exemple , à trouver $\sin \frac{ma}{n}$ étant donné $\sin a$

$\left(\frac{m}{n} \right.$ peut toujours être supposée irréductible $\left. \right)$. Il peut se pré-

senter trois cas : 1° m et n impairs ; ex. : $\frac{5}{7}a$. 2° m impair ,

n pair ; ex. : $\frac{5}{6}a$. 3° m pair et n impair ; ex. : $\frac{4a}{7}$.

1^{re} cas. Trouver $\sin \frac{5}{7}a$ connaissant $\sin a = b$.

On calculera $\sin 5a = f(b) = b'$ d'après la formule de Moivre. Puis on emploiera celle qui donne $\sin a$ en fonction de $\sin \frac{a}{7}$, en observant que $5\frac{a}{7}$ est le 7^e de $5a$. Si donc on pose $5a = a'$, le problème proposé revient maintenant à celui-ci : Connaissant $\sin a' = b'$, trouver $\sin \frac{a'}{7} = x$.

L'équation du problème sera du 7^e degré.

La discussion se ferait absolument comme pour $\frac{a}{7}$. Les racines correspondent à 7 arcs formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{5a}{7}$ et la raison $\frac{2\pi}{7}$.

2^e cas. Trouver $\sin \frac{5a}{6}$, étant donné $\sin a$.

Le calcul de $\sin 5a$ en fonction de $\sin a$ par la formule de Moivre ne donne qu'une valeur b' ; en employant cette valeur, toujours d'après la méthode de Moivre, pour trouver $\sin \frac{5a}{6}$, on arrive à une équation

$$b' = f(x) \quad .$$

du 12^e degré. La discussion servant à déterminer les arcs correspondants aux racines se ferait comme pour $\frac{a}{6}$; il suffit d'observer, en posant $5a = a'$, que connaissant $\sin 5a$, ou $\sin a' = b'$, on cherche $\sin \frac{a'}{6}$.

3^e cas. Trouver $\sin \frac{4}{7}a$, connaissant $\sin a = b$.

On cherchera d'abord $\sin 4a$ au moyen de la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\sin 4a &= 4 \sin a \cos^3 a - 2 \sin^3 a \cos a, \\ &= (4 \sin a - 6 \sin^3 a) \cos a, \\ &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 a} (4 \sin a - 6 \sin^3 a); \end{aligned}$$

ou bien

$$\sin 4a = \pm \sqrt{1 - b^2} (4b - 6b^3) = \pm b'.$$

Pour continuer le calcul, il faudra employer successivement l'une et l'autre de ces valeurs pour trouver $\sin \frac{1}{7} 4a$, d'après la formule de Moivre, qui donne $\sin a$ en fonction de $\sin \frac{a}{7}$; nous aurons :

$$b' = f(x), \quad (1)$$

$$-b' = f(x), \quad (2)$$

que nous pouvons réunir en une seule :

$$b' = [f(x)]'.$$

On voit facilement, par l'algèbre, que les équations (1) et (2) ont toutes leurs racines différentes, à moins que b ne soit 0. Nous allons vérifier cette circonstance par la discussion des formules trigonométriques, laquelle nous apprend aussi que chacune de ces équations a toutes ses racines réelles.

En effet, nous avons :

$$b' = \sin 4a; \quad -b' = -\sin 4a = \sin(-4a).$$

Par conséquent toutes les racines de (1) correspondent aux arcs des deux formules suivantes :

$$\frac{4a}{7} + \frac{2k\pi}{7}, \quad \frac{-4a}{7} + \frac{(2k+1)\pi}{7}; \quad (\alpha)$$

celles de (2) aux arcs des formules suivantes :

$$\frac{-4a}{7} + \frac{2k\pi}{7}, \quad \frac{4a}{7} + \frac{(2k+1)\pi}{7}. \quad (\beta)$$

Je ne ferai pas la discussion qui apprend que tous les arcs des formules (α) ont mêmes sinus que 7 arcs formant une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{4a}{7}$, et la raison $\frac{2\pi}{7}$. De même pour les arcs de la formule (β).

Je vais seulement montrer que, pour des valeurs quelconques de a , les 7 arcs de la première progression ont des sinus différents de ceux des 7 arcs de la progression déduite des formules (β).

Deux arcs des formules $\frac{4a}{7} + \frac{2k\pi}{7}$, $\frac{-4a}{7} + 2k\pi$ ne peuvent avoir même sinus, pour a quelconque, que dans le cas où la somme $\frac{2k'\pi + 2k''\pi}{7}$ serait un nombre entier impair de demi-circonférences; or cela est impossible, car ce quotient, s'il était entier, serait évidemment un multiple pair de π .

Deux arcs des formules $\frac{4a}{7} + \frac{2k\pi}{7}$, $+\frac{4a}{7} + \frac{(2k+1)\pi}{7}$ ne peuvent avoir même sinus que si la différence $\frac{(2k''+1)\pi - 2k'\pi}{7}$ est un nombre entier pair de demi-circonférences, ce qui est impossible; car on peut regarder $2k''+1$, et $2k'$ comme étant chacun moindre que 2×7 .

Même raisonnement pour démontrer qu'un arc de la deuxième formule (α) ne peut avoir même sinus, quand a est quelconque, que l'un des arcs des formules (β).

On peut d'ailleurs facilement déterminer des valeurs de a ; telles que deux arcs de ces formules aient même sinus. Par exemple, on posera :

$$\frac{4a}{7} + \frac{2k'\pi}{7} - \left(\frac{-4a}{7} + \frac{2k''\pi}{7} \right) = 2n\pi,$$

ou

$$\frac{8a}{7} + \frac{2(k' - k'')\pi}{7} = 2n\pi;$$

d'où enfin

$$4a = 7 \cdot n\pi - (k' - k'')\pi,$$

dans laquelle k' et k'' ont toutes les valeurs entières de 0 à 6 ; d'où il résulte que $k' - k''$ a aussi toutes les valeurs entières de 0 à 6. Ce résultat est conforme à ce que demande l'algèbre pour que les équations (1) et (2) aient des racines communes, à savoir, que $b' = \sin 4a$ soit égal à 0 ; car, dans la dernière égalité, $4a$ est un multiple de π .

Il est évident que la règle exposée au commencement de cette note servira à choisir la racine convenable parmi celles des équations obtenues dans les différents calculs que nous venons d'indiquer.