

C. DROUETS

Complément de la solution du n°118

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 479-482

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__479_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENT DE LA SOLUTION DU N°118 (V. p. 413).

PAR M. C. DROUETS,
élève du collège royal militaire de La Flèche.

—

Il restait à démontrer le théorème pour un exposant fractionnaire.

Soit donc $a^{\frac{m}{n}} \dots b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}}$; au lieu de ces nombres, je prends $a^m \dots (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^n$; mais $a^1 = b^1 + c^1$, donc on aura encore :

$$a^{1^m} \dots (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^n,$$

$$(b^1 + c^1)^m \dots (b^{\frac{m}{n}} + c^{\frac{m}{n}})^n.$$

Ces deux développements sont connus, puisque les exposants sont entiers et positifs, mais ils n'ont pas le même nombre de termes; le premier en a $m + 1$, le second $2n + 1$.

En réunissant les termes à égales distances des extrêmes, on a pour termes généraux d'une part :

$$T = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1. 2. 3. \dots p} [b^{1^{m-p}} c^{1^p} + c^{1^{m-p}} b^{1^p}],$$

de l'autre :

$$T' = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-p+1)}{1. 2. 3. \dots p} \left[b^{1^{2n-p} \frac{m}{n}} c^{1^p \frac{m}{n}} + c^{1^{2n-p} \frac{m}{n}} b^{1^p \frac{m}{n}} \right].$$

1° Soit $\frac{m}{n} > 2$ ou $\frac{m}{n} = 2 + x$, on voit facilement que le coefficient de T est $>$ que celui de T'.

Les parenthèses deviennent :

$$b^{1^{2n-p}} c^{1^p} + c^{1^{2n-p}} b^{1^p} = A + B,$$

$$b^{1^{2n-p}} c^{1^p} \left(\frac{c}{b}\right)^{px} + c^{1^{2n-p}} b^{1^p} \left(\frac{b}{c}\right)^{px} = A \left(\frac{c}{b}\right)^{px} + B \left(\frac{b}{c}\right)^{px}.$$

La différence est $\frac{(A-B)(b^{1^{2px}} - c^{1^{2px}})}{(bc)^{1^{2px}}}$.

Si b est $> c$ $b^{1^{2px}} > c^{1^{2px}} \dots \frac{A}{B}$ sera $= \frac{b^{1^{2n-4p}}}{c^{1^{2n-4p}}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{1^{2n-4p}} > 1$,

donc la première parenthèse sera plus grande que la seconde.

Si b est $< c$, $b^{px} < c^{px}$, $\frac{A}{B} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2m-4p} < 1$, donc la première parenthèse sera plus grande que la seconde, car la différence de la première à la seconde est positive.

On voit donc que la première série a plus de termes que la seconde, que chaque terme de la première est plus grand que son correspondant de la seconde, donc :

$$\frac{m}{a^n} > \frac{m}{b^n} + \frac{m}{c^n}, \quad \frac{m}{n} > 2.$$

On voit que le coefficient numérique de P est moindre que celui de T' .

2° $\frac{m}{n} < 2$, $\frac{m}{n} = 2 - x$; les parenthèses deviennent :

$$A + B, \\ A \left(\frac{b}{c}\right)^{px} + B \left(\frac{c}{b}\right)^{px}.$$

Leur différence est $\frac{(A-B)(c^{px} - b^{px})}{(bc)^{px}}$.

Si $c > b$, $c^{px} - b^{px} > 0$; $\frac{A}{B} = \left(\frac{b}{c}\right)^{2m-4p} < 1$, $A - B < 0$, donc la différence sera négative, c'est-à-dire que la première parenthèse sera moindre que la seconde.

Si $c < b$, $c^{px} - b^{px} < 0$; $\frac{A}{B} \dots > 1$, $A - B > 0$, la différence sera encore négative; donc $T < T'$.

Or $m < 2n$; la seconde série a plus de termes que la première; chacun de ses termes surpasse celui de la série qui lui correspond, donc $\frac{m}{a^n} < \frac{m}{b^n} + \frac{m}{c^n}$ quand $\frac{m}{n} < 2$.

Cas de l'exposant négatif.

$$a^{-\frac{m}{n}} < b^{-\frac{m}{n}} + c^{-\frac{m}{n}} \text{ quel que soit } \frac{m}{n}.$$

On a
$$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \dots \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} + \frac{1}{c^{\frac{m}{n}}},$$

ou
$$b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}} \dots a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}},$$

or $a^2 = b^2 + c^2$, donc a est $> b$, a est $> c$;

donc
$$a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}, \quad a^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}};$$

donc
$$2b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}};$$

donc à fortiori

$$b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} + a^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}.$$