

GEORGES RITT

La strophoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 470-478

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__470_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA STROPHOIDE (*).

PAR M. GEORGES RITT.

1. Au milieu C d'un axe $AB = 2a$ s'élève une *directrice* CO orthogonale, coupée par des *rayons vecteurs* AMM' partant de l'origine A des coordonnées. On demande le lieu des points M, M' déterminés sur les rayons vecteurs de manière que $CZ = ZM = Z'M'$; Z étant l'intersection du rayon vecteur avec la directrice (*fig. 48*).

(*) M. Finck, lorsque le nombre de chiffres à trouver au quotient est plus grand que le nombre de ceux qui restent à la droite de son dernier diviseur, est également réduit à recourir à la méthode vulgaire, à moins d'appliquer mon procédé de périodes de divisions abrégées en rétablissant la vérité.

(**) Cette courbe a déjà été étudiée par M. Midy. V. t. III, p. 294.

En considérant les points M, C, M' comme appartenant à une circonférence de rayon variable, toujours tangente en C à l'axe AB, l'équation renfermera la condition de l'intersection continuelle d'une droite mobile autour de A avec la circonférence indiquée. Les méthodes usuelles nous donnent :

$$y^2 = \frac{x(a-x)^2}{2a-x} \dots \dots \dots (A)$$

qui prouve que le lieu est une courbe symétrique autour de l'axe AB; elle le coupe en A, et en C, où elle forme un *nœud*. Entre A et C la courbe forme une *feuille* dont A est le *sommet* et s'étend ensuite entre C et B en deux *branches* infinies, dont la perpendiculaire BB' élevée sur l'axe au point B est l'asymptote.

2. En posant l'origine des coordonnées en C, l'équation devient :

$$y^2 = \frac{x^2(a \mp x)}{a \pm x} \dots \dots \dots (B)$$

Le signe supérieur appartient à la feuille, l'inférieur aux branches.

3. Chaque point M de la feuille a un point *conjugué* M' qui appartient à une branche; j'appelle les fonctions de la courbe en M' *conjuguées* des fonctions correspondantes au point M.

4. Les abscisses conjuguées CP, CP' comptées du nœud C sont égales entre elles.

5. En nommant X, Y les coordonnées de M', leurs valeurs données par y, x sont :

$$X = 2a - x \dots \dots \dots (C)$$

$$Y = \frac{y}{x}(2a-x) = (a-x) \sqrt{\frac{2a-x}{x}} \dots \dots (D)$$

6. Du point C comme centre décrivez avec le rayon $AC=a$ un cercle; ce sera le cercle *circonscrit* à la strophoïde. En prolongeant l'ordonnée y de la courbe au point M jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en Q, ce point sera le point *conjugué* du cercle appartenant au point M, et ses fonctions circulaires seront *conjuguées* à celles de la courbe en M.

Le cercle circonscrit est un élément très-important dans l'investigation de la courbe.

7. A l'aide de l'équation (A), en nommant u l'ordonnée au cercle conjugué de y , on trouve aisément :

$$y = \frac{x(a-x)}{u} = \frac{u(a-x)}{2a-x} \dots \dots \dots (E)$$

autre forme importante de l'équation de la courbe.

8. L'équation (B) donne de même :

$$y = \frac{x(a \mp x)}{u} = \frac{ux}{a \pm x} \dots \dots \dots (F)$$

9. Si la directrice était inclinée à l'axe d'un angle φ , l'équation au sommet A de la courbe deviendrait :

$$y = \frac{a-x}{2a-x} \left((a-x)\cos\varphi \pm \sqrt{(2a-x)x + (a-x)^2\cos^2\varphi} \right) \dots (G)$$

10. En substituant dans cette équation la valeur de l'ordonnée conjugué du cercle circonscrit, parallèle à la directrice, on retrouve l'équation (E).

Théorèmes.

Il est aisé maintenant de démontrer les théorèmes suivants, relatifs à la directrice orthogonale :

11. Les cordes conjugées MC, M'C font constamment entre elles un angle droit.

12. Les trois triangles rectangles MCP, M'CP', MCM' sont semblables ; par conséquent nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \overline{MC}^2 &= MP \cdot MM' \\ \overline{CM'}^2 &= M'P' \cdot MM' \\ \overline{CP}^2 &= MP \cdot M'P' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (H)$$

13. Nous avons aussi .

$$\overline{AC}^2 = AM \cdot AM' \dots \dots \dots (I)$$

14. La perpendiculaire ML au rayon vecteur AM en M est égale à la partie CL de l'axe compris entre le centre et le point L où la perpendiculaire ML coupe l'axe.

Cette propriété donne un autre moyen de construire la strophoïde. Celle-ci et la première construction qui a servi pour trouver l'équation se prêtent aisément à la description de la courbe par mouvement continu. Il suffit pour cela d'un fil , d'une règle et d'une équerre , ou d'un fil et de deux règles.

15. Une perpendiculaire MK à la corde CM en M, coupant l'axe en K, divise l'angle AMP en deux parties égales entre elles et à l'angle MCP.

15 bis. La corde MC coupe par moitié l'angle PMM' que fait le rayon vecteur avec l'ordonnée de la feuille au point M ; la corde conjuguée CM' coupe aussi par moitié l'angle AMP'.

16. On trouve en outre la progression :

$$PK : PM : CP : M'P' \dots \dots \dots (K).$$

17. La tangente conjuguée du cercle en Q est toujours parallèle au rayon vecteur AM.

18. Soit conduit le rayon vecteur AB' rencontrant l'asymptote BB' en B'. Il est coupé en V par le cercle circonscrit. On trouvera alors AV = 2u,

$$\left. \begin{aligned} \text{VB}' &= \text{M}'\text{P}' - \text{MP} \\ \text{M}'\text{V} &= u - \gamma \\ \text{AM} &= u - \gamma \\ \text{MV} &= u + \gamma. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{L})$$

19. La courbe coupe l'axe en C sous un angle moitié d'un angle droit.

20. L'ordonnée *maxima* de la feuille est à très-peu près $= \frac{3}{10} a$; sa conjuguée $= \frac{6}{5} a$; son abscisse du centre est approximativement $= \frac{3}{5} a$, ou double de l'ordonnée de la feuille.

21. La méthode des tangentes nous donne à l'aide de l'équation (A) les fonctions tangentiellles de la courbe que voici :

$$\left. \begin{aligned} \text{La tangente MT} &= \frac{a(a-x)}{(a-x)^2 - ax} \sqrt{\frac{x(a^2 + 2ax - x^2)}{2a-x}} \\ \text{La sous-tangente PT} &= \frac{x(2a-x)(a-x)}{(a-x)^2 - ax} \\ \text{La normale MN} &= \frac{a(a-x)}{(2a-x)^2} \sqrt{(a^2 + 2ax - x^2)} \\ \text{La sous-normale PN} &= \frac{(a-x)((a-x)^2 - ax)}{(2a-x)^2} \end{aligned} \right\} \dots (\text{M}).$$

22. Un arc s de la strophoïde se trouve exprimé par la série

$$s = \sqrt{2} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2a} + \frac{5x^3}{3 \cdot 4a^2} - \frac{5x^4}{4^2 a^3} + \frac{47x^5}{4 \cdot 5 \cdot 8a^4} - \text{etc.} \right).$$

23. La quadrature d'un aire strophoïdale à l'aide de l'équation (B) sera

$$\int y dx = \int x dx \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Cette expression, intégrée depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, donnera l'aire de la feuille $= a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$. Ainsi en inscrivant un cercle dans le carré du demi-axe, la somme des quatre coins curvilignes qui représentent la différence de ces deux figures égalera l'aire cherchée.

24. Le solide de révolution de la feuille autour de l'axe est

$$\pi \int y^2 dx = 2\pi a^3 \left(\log. 2a - \frac{2}{3} \right).$$

PROBLÈMES.

25. *Conduire une tangente à un point M de la courbe.*

De la soustangente conjuguée du cercle circonscrit retranchez le demi axe; la troisième proportionnelle à la différence obtenue et à l'ordonnée conjuguée du cercle donnera la soustangente de la courbe, et par suite la tangente.

26. *Trouver deux ordonnées conjuguées dans la courbe, ayant une différence donnée.*

Du sommet A on conduira un rayon vecteur tel, que sa portion comprise entre l'asymptote et le cercle circonscrit soit égale à la différence donnée; les deux ordonnées conjuguées ainsi déterminées résoudront le problème (§ 18).

27. *Trouver deux ordonnées conjuguées dont la somme des carrés soit égale à une surface donnée.*

Prenez sur la directrice $CZ = \frac{1}{2}$ du côté du carré donné; par Z tirez un rayon vecteur qui résoudra le problème.

28. Voici les énoncés de quelques autres problèmes qui peuvent se résoudre à l'aide de constructions synthétiques faciles :

Conduire un rayon vecteur au cercle circonscrit tel, que la branche de la strophoïde le coupe comme $m:n$.

Trouver dans la courbe deux cordes conjuguées qui soient entre elles $::m:n$.

Trouver une ordonnée qui soit à son abscisse comptée du nœud $::m:n$.

Trouver deux cordes conjuguées, dont les carrés soient entre eux $::m:n$.

Trouver deux rayons vecteurs conjugués qui aient une somme ou différence donnée.

29. Les problèmes suivants sont faciles, et nécessaires à l'application de la courbe au dessin d'architecture :

1° Le nœud et l'inclinaison de la directrice étant donnés, trouver le sommet et l'axe relatif à un arc donné de la courbe.

On résout la question par les §§ 15 et 15 bis.

2° Le sommet A étant connu, ainsi que la direction de l'axe, déterminer le nœud, et la longueur de l'axe relatif à un arc donné de la courbe.

A l'aide du § 15 bis.

3° L'ordonnée *maxima* étant donnée de grandeur et de position, déterminer les autres fonctions de la courbe.

Au moyen du § 20.

4°. Etant donné un arc de la courbe, compris entre le nœud et l'ordonnée *maxima*, déterminer les autres fonctions.

Sur la corde de cet arc on construit un triangle rectangle tel, que l'un des côtés soit double de l'autre. (§ 20.)

Applications.

30. L'extrême facilité qui est le caractère presque exclusif de la géométrie du cercle, a causé l'introduction de cette courbe précieuse dans toutes les parties de l'architecture. Mais de ce qu'elle se prête heureusement à la plupart des cas, on ne doit pas conclure que son usage soit inévitable-

ment nécessaire ou même préférable dans toutes les circonstances. Déjà la conchoïde a dû être appelée au secours pour la diminution des colonnes; la parabole, l'ellipse, la chaînette remplacent à leur tour le cercle où son insuffisance ne saurait être niée. Mais il y a une foule de cas où aucune de ces courbes, sans excepter le cercle, ne saurait être avantageusement appliquée. On peut, à la vérité, souder ensemble plusieurs arcs de cercle, ou des arcs de courbes différentes pour obtenir des formes particulières; mais quelle peine, quel tact naturel n'exige pas le choix convenable des centres, des rayons ou des axes, pour que ces soudures soient agréables à l'œil exercé des connaisseurs.

Pour aplanir ces difficultés, on a imaginé plusieurs moyens bien connus de tous les artistes, tels que des règles découpées suivant certains profils tracés au hasard par une main heureuse, des opérations empyriques, etc. Mais plus ces remèdes sont ingénieux, plus ils s'écartent de la géométrie, et plus ils manquent de généralité.

31. Ces inconvénients se font encore plus vivement sentir, lorsqu'il s'agit de réduire un dessin déjà fait à des proportions différentes. Tous les moyens dont on se sert pour *créer*, deviennent inapplicables dès qu'il s'agit de *copier*. Au moyen d'une règle profilée, on peut construire un vase par exemple; comment appliquer ce dessin à l'exécution en grand sur une place publique? Avec les moyens de réduction ordinaires, on pourra obtenir un profil qui à *peu près* reproduira les formes voulues; mais les proportions approuvées sur le papier seront nécessairement blessées par la réduction, puisqu'il est impossible d'obtenir en d'autres proportions une courbe semblable à une courbe donnée *tracée au hasard*; puisqu'il faudrait pouvoir au hasard obtenir dans une même proportion différente de la première toutes les fonctions géométriques de la courbe donnée. Cette difficulté disparaît

lorsqu'il s'agit d'une courbe formée par différents arcs de cercle; mais aussi quelles constructions, quel travail pour obtenir des centres posés semblablement et des rayons proportionnels !

32. La strophoïde, par la variété de courbures que présente son parcours depuis le sommet jusqu'à une certaine proximité de l'asymptote, se prête aisément à presque toutes les formes gracieuses que le cercle ne peut donner par lui-même; et comme les strophoïdes sont toutes semblables, il n'est rien de si facile que de copier en telle proportion qu'on voudra un dessin exécuté à l'aide de cette courbe. L'auteur en a fait des applications au dessin de fontaines, de vases, de balustrades et consoles; de parquets en mosaïques, de grilles, etc. Elle produit des moulures supérieures en élégance à celles construites par le cercle, et particulièrement les talons, les doucines et les scoties. La strophoïde se prête singulièrement au dessin d'architecture gothique; la partie de la feuille comprise entre le nœud et l'ordonnée *maxima* a l'avantage d'une solidité et d'une hauteur supérieure à celle que possède dans la même largeur l'arc en ogive ordinaire circonscrit au triangle équilatère. La partie de la feuille comprise entre le sommet A et l'ordonnée *maxima*, a quelque ressemblance avec le demi-cercle, et n'est pas moins élégante; elle peut présenter des avantages dans la construction des ponts, attendu que sous une même largeur elle offre un dixième de plus de hauteur, et par conséquent plus de solidité que l'arc circulaire en plein cintre.

Enfin cette courbe offre les courbures les plus douces que l'on puisse désirer dans la construction des chemins; la parabole ne peut offrir sous ce rapport un avantage égal, puisque la strophoïde est une courbe asymptotique, ce que la parabole n'est pas.