

DE PISTORIS

Quelques propriétés du triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 451-460

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__451_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTILIGNE.

(V. t. I, p. 79, 139, 196 ; t. II, p. 544 ; t. III, p. 457.)

PAR M. DE PISTORIS,

Capitaine d'artillerie.

I. Soient a, a', a'' , les trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque ; $\alpha, \alpha', \alpha''$, les longueurs des perpendiculaires abaissées des sommets des angles sur les côtés opposés ;

(*) Nous reviendrons sur cet intéressant et difficile problème d'une utilité pratique, en beaucoup de circonstances. Tm.

$e, e'; e', e''; e'', e'''$, les segments des perpendiculaires compris entre leur point de rencontre et les sommets du triangle, et entre ce même point de rencontre et leurs pieds;

$m, n; m', n'; m'', n''$, les segments formés par les perpendiculaires sur les côtés du triangle;

r, r', r'', r''' , les rayons des cercles inscrit et ex-inscrits;

R , le rayon du cercle circonscrit;

S , la surface du triangle; $2p$ son périmètre $= a + a' + a''$.

On a les diverses relations connues et qu'il suffit de rappeler :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-a')(p-a'')}{p}}; \quad r' = \sqrt{\frac{p(p-a')(p-a'')}{p-a}}; \\ r'' &= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-a'')}{p-a'}}; \quad r''' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-a')}{p-a''}}; \\ R &= \frac{aa'a''}{4\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}; \\ \alpha &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a}; \quad \alpha' = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a'}; \\ \alpha'' &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a''}; \\ S &= \frac{a\alpha}{2} = \frac{a'\alpha'}{2} = \frac{a''\alpha''}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')} = \\ &= r \frac{a+a'+a''}{2} = \frac{aa'a''}{4R}. \end{aligned}$$

$$\text{On a aussi : } S = \sqrt{r r' r'' r'''},$$

$$\text{et comme } \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}; \quad S = \frac{r r' r''}{\sqrt{r r' + r r'' + r' r'''}}.$$

Des valeurs de $R, \alpha, \alpha', \alpha''$, on déduit par voie de multiplication :

$$\frac{R\alpha\alpha'\alpha''}{2} = S;$$

Et par voie de multiplication et d'addition en même temps :

$$2R(\alpha + \alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha''.$$

La valeur de R multipliée par celle de r donne :

$$Rr = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{2(\alpha + \alpha' + \alpha'')}.$$

Des valeurs de $\rho, \rho', \rho''; \alpha, \alpha', \alpha''$, résulte la formule :

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\rho\rho'\rho''} = \frac{2r}{R}.$$

II. Carnot, dans sa Géométrie de position, démontre les formules suivantes, qui sont autant de théorèmes sur les triangles :

$$\alpha s = mn; \alpha's' = m'n'; \alpha''s'' = m''n'' \quad (1)$$

$$\alpha^3 + e^3 = \alpha'^3 + e'^3 = \alpha''^3 + e''^3 = 4R^3 \quad (2)$$

$$\alpha e = 2R \cdot \beta; \alpha'e' = 2R \cdot \beta'; \alpha''e'' = 2R \cdot \beta'' \quad (3)$$

(β, β', β'' , étant les longueurs des droites joignant deux à deux les pieds des perpendiculaires.)

$$mm'n'' = nn'n'', \\ e + e' + e'' = 2R + 2r;$$

On a évidemment :

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 6S; \alpha s + \alpha' s' + \alpha'' s'' = 2S;$$

d'où l'on conclut :

$$\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' = 4S.$$

Cela posé, les formules (3) donnent :

$$\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' = 2R(\beta + \beta' + \beta'').$$

d'où

$$S = R \frac{\beta + \beta' + \beta''}{2}.$$

Donc, la surface d'un triangle est égale au rayon du cercle

circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle formé par les droites joignant les pieds des perpendiculaires.

III. Les formules (2) conduisent, par voie d'addition, à l'identité :

$$a^2 + a'^2 + a''^2 + e^2 + e'^2 + e''^2 = 12R^2;$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des trois côtés d'un triangle et des trois droites joignant le point de rencontre des hauteurs aux sommets est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

Du premier théorème que nous venons d'énoncer, on déduit très-simplement les formules :

$$\frac{\beta + \beta' + \beta''}{a} = \frac{a}{R}, \quad \frac{\beta + \beta' + \beta''}{a'} = \frac{a'}{R}, \quad \frac{\beta + \beta' + \beta''}{a''} = \frac{a''}{R}.$$

$$\beta + \beta' + \beta'' = \frac{aa'a''}{2R^2}; \quad \frac{\beta + \beta' + \beta''}{a + a' + a''} = \frac{r}{R}.$$

IV. Carnot démontre encore, et ce sont au reste des formules connues :

$$2ae = a^2 + a'^2 - a''^2; \quad 2a'e' = a^2 + a''^2 - a'^2; \quad 2a''e'' = a'^2 + a'^2 - a^2,$$

d'où

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 2(ae + a'e' + a''e'').$$

La somme des carrés des trois côtés d'un triangle est égale à deux fois la somme des produits des perpendiculaires par la portion de ces perpendiculaires comprise entre leur point de rencontre et les sommets du triangle.

V. On trouve facilement :

$$m = \frac{a'^2 + a''^2 - a^2}{2a} = \frac{ae}{a}; \quad m' = \frac{a'e'}{a'}; \quad m'' = \frac{a''e''}{a''}.$$

On en déduit :

$$\frac{mm'm''}{ee'e''} = \frac{aa'a''}{aa'a''}.$$

En cherchant de même les valeurs de ϵ , ϵ' , ϵ'' , on sera conduit à l'expression :

$$\frac{\epsilon\epsilon'\epsilon''}{\alpha\alpha'\alpha''} = \frac{e^2e'^2e''^2}{a^2a'^2a''^2},$$

qui, combinée avec la précédente, donne :

$$\frac{aa'a''}{mm'm''} = \frac{ee'e''}{\epsilon\epsilon'\epsilon''}.$$

Les valeurs de β , β' , β'' , en fonction des trois côtés, sont :

$$\beta = \frac{a}{2a'a''} (a'^2 + a''^2 - a^2); \quad \beta' = \frac{a'}{2aa'} (a^2 + a''^2 - a'^2);$$

$$\beta'' = \frac{a''}{2aa'} (a^2 + a'^2 - a''^2),$$

d'où

$$\frac{\beta\beta'\beta''}{\alpha'\alpha\alpha''} = \frac{ee'e''}{aa'a''} \text{ et à cause de } \frac{mm'm''}{ee'e''} = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{aa'a''},$$

$$mm'm'' = \beta\beta'\beta''.$$

Le produit de trois segments formés sur les côtés d'un triangle par les perpendiculaires abaissées des sommets, égale le produit des trois droites joignant les pieds de ces perpendiculaires.

VI. Déterminons actuellement les côtés d'un triangle en fonction des rayons des trois cercles ex-inscrits.

Des valeurs de ρ , ρ' , ρ'' , on déduit :

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{a + a'' - a'}{a + a' - a''}, \quad \frac{\rho}{\rho''} = \frac{a' + a'' - a}{a + a' - a''}.$$

de là on tire facilement :

$$a' - a'' = -a \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}; \quad a' + a'' = a \frac{2\rho\rho' + \rho''(\rho + \rho')}{\rho''(\rho + \rho')};$$

substituant dans la valeur de ρ , faisant les calculs, et rédui-

sant, on trouvera :
$$a = \frac{\rho''(\rho + \rho')}{\sqrt{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}};$$

on aurait de même :

$$a' = \frac{\rho' (\rho + \rho'')}{\sqrt{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}};$$

$$a'' = \frac{\rho (\rho' + \rho'')}{\sqrt{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}};$$

on conclut de là par addition :

$$a + a' + a'' = 2 \sqrt{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}.$$

Par multiplication et addition ,

$$aa' + aa'' + a'a'' = \frac{\rho\rho'\rho''(\rho + \rho' + \rho'')}{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''} +$$

$$+ \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'' = \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho\rho' + \rho'\rho'';$$

et enfin par l'élevation au carré et ajoutant ,

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'' + \frac{\rho^3\rho'^2 + \rho^2\rho'^3 + \rho'^3\rho''^2}{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}.$$

VII. On trouve aussi très-facilement , les longueurs des perpendiculaires en fonction de ces mêmes rayons des cercles ex-inscrits , ces valeurs sont :

$$\alpha = \frac{2\rho'\rho''}{\rho' + \rho''}; \quad \alpha' = \frac{2\rho\rho''}{\rho + \rho''}, \quad \alpha'' = \frac{2\rho\rho'}{\rho + \rho'};$$

on en déduit .

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{8\rho^2\rho'^2\rho''^2}{(\rho + \rho')(\rho + \rho'')(\rho' + \rho'')}, \quad \text{et à cause de} \quad S^2 = \frac{R \cdot \alpha\alpha'\alpha''}{2},$$

$$R = \frac{(\rho + \rho')(\rho + \rho'')(\rho' + \rho'')}{4(\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'')}.$$

En multipliant deux à deux les valeurs de $\alpha, \alpha', \alpha''$ et ajoutant on a :

$$\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = \frac{8\rho\rho'\rho''(\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'')}{(\rho + \rho')(\rho + \rho'')(\rho' + \rho'')};$$

et par suite le rapport

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha''} = \frac{\rho\rho'\rho''}{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha''} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{r}.$$

VIII. Si l'on déterminait ρ, ρ', ρ'' en fonction de $\alpha, \alpha', \alpha''$, on trouverait :

$$\rho = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' - \alpha\alpha''}; \quad \rho' = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' - \alpha\alpha''}; \quad \rho'' = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha' + \alpha'\alpha'' - \alpha\alpha''}.$$

IX. Si l'on cherche en fonction des trois côtés, les distances o, o', o'' , $\omega, \omega', \omega''$ des centres des cercles inscrit et ex-inscrits, on trouve :

$$o = a\sqrt{\frac{a'a''}{p(p-a)}}; \quad o' = a'\sqrt{\frac{aa''}{p(p-a')}}; \quad o'' = a''\sqrt{\frac{aa'}{p(p-a'')}};$$

$$\omega = a\sqrt{\frac{a'a''}{(p-a')(p-a'')}}; \quad \omega' = a'\sqrt{\frac{aa''}{(p-a)(p-a')}};$$

$$\omega'' = a''\sqrt{\frac{aa'}{(p-a)(p-a')}}.$$

Des trois dernières égalités on déduit :

$$\omega.\omega'.\omega'' = 8R^2(a + a' + a'').$$

X. Si l'on se rappelle l'expression $aa'a'' = 2R^2(\beta + \beta' + \beta'')$, et si l'on remarque en outre que les côtés a, a', a'' sont précisément les droites joignant les pieds des hauteurs du triangle, dont les côtés sont $\omega, \omega', \omega''$, on en conclura que le rayon R' du cercle circonscrit à ce dernier triangle est égal à $2R$; on aura aussi :

$$o^2 + o'^2 + o''^2 + \omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 = 12.R^2 = 48.R'^2.$$

XI. Actuellement $D, \Delta, \Delta', \Delta''$ étant les distances du centre du cercle circonscrit à chacun des centres des cercles inscrit et ex-inscrits, on sait que l'on a :

$$D^2 = R^2 - 2Rr; \Delta^2 = R^2 + 2R\rho; \Delta'^2 = R^2 + 2R\rho'; \Delta''^2 = R^2 + 2R\rho'',$$

d'où à cause de $4R = \rho + \rho' + \rho'' - r$,

$$D^2 + \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 = 12.R^2,$$

par conséquent

$$o^2 + o'^2 + o''^2 + \omega^2 + \omega'^2 + \omega''^2 + D^2 + \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 = 60R^2;$$

ce qui donne ce théorème :

La somme des carrés des dix droites joignant deux à deux les centres des cercles circonscrit, inscrit, et ex-inscrits à un même triangle, est égale à soixante fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

XII. En passant des valeurs de $\omega, \omega', \omega'', o, o', o''$ au triangle primitif, on trouverait en fonction des trois droites β, β', β'' , les côtés et segments a, a', a'', e, e', e'' . Je mets ici ces formules comme simple renseignement.

$$\begin{aligned} a &= 2\beta \sqrt{\frac{\beta'\beta''}{(\beta + \beta' - \beta'')(\beta + \beta'' - \beta')}} , \\ a' &= 2\beta' \sqrt{\frac{\beta\beta''}{(\beta' + \beta'' - \beta)(\beta + \beta' - \beta'')}} , \\ a'' &= 2\beta'' \sqrt{\frac{\beta\beta'}{(\beta' + \beta'' - \beta)(\beta + \beta'' - \beta')}} ; \\ e &= 2\beta \sqrt{\frac{\beta'\beta''}{(\beta + \beta' + \beta'')(\beta' + \beta'' - \beta)}} , \\ e' &= 2\beta' \sqrt{\frac{\beta\beta''}{(\beta + \beta' + \beta'')(\beta + \beta'' - \beta')}} , \\ e'' &= 2\beta'' \sqrt{\frac{\beta\beta'}{(\beta + \beta' + \beta'')(\beta + \beta'' - \beta')}} . \end{aligned}$$

XIII. En déterminant les distances du centre du cercle inscrit aux sommets du triangle, et rapportant les formules au triangle primitif, on obtiendra facilement :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta' \beta'' (\beta + \beta' + \beta'')}{\beta' + \beta'' - \beta}}; \quad \alpha' = \sqrt{\frac{\beta \beta'' (\beta + \beta' + \beta'')}{\beta + \beta'' - \beta'}};$$

$$\alpha'' = \sqrt{\frac{\beta \beta' (\beta + \beta' + \beta'')}{\beta + \beta' - \beta''}};$$

ce qui conduira par des calculs très-simples à la formule

$$\beta^3 \beta' \beta'' = \alpha \alpha' \alpha'' \cdot \epsilon \epsilon' \epsilon'';$$

c'est-à-dire que dans un triangle le produit des trois droites joignant les pieds des perpendiculaires élevé au carré, égale le produit de ces perpendiculaires par le produit des trois segments compris entre leurs pieds et leur point de rencontre.

XIV. Des valeurs de $e, e', e'', \alpha, \alpha', \alpha''$ on déduit facilement :

$$\frac{e}{\alpha} + \frac{e'}{\alpha'} + \frac{e''}{\alpha''} = 2,$$

on aurait aussi :

$$\frac{\alpha \alpha' \alpha''}{e e' e''} = \frac{(\beta + \beta' + \beta'')^3}{8 \beta \beta' \beta''}.$$

Les valeurs de $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ seront :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\beta' \beta'' (\beta' + \beta'' - \beta)}{\beta + \beta' + \beta''}}, \quad \epsilon' = \sqrt{\frac{\beta \beta'' (\beta + \beta'' - \beta')}{\beta + \beta' + \beta''}},$$

$$\epsilon'' = \sqrt{\frac{\beta \beta' (\beta + \beta' - \beta'')}{\beta + \beta' + \beta''}};$$

et par suite

$$\frac{\epsilon}{\alpha} + \frac{\epsilon'}{\alpha'} + \frac{\epsilon''}{\alpha''} = 1;$$

on a encore :

$$\alpha \epsilon = \beta' \beta'', \quad \alpha' \epsilon' = \beta \beta'', \quad \alpha'' \epsilon'' = \beta \beta',$$

et

$$e \epsilon = e' \epsilon' = e'' \epsilon = \frac{2 \beta \beta' \beta''}{\beta + \beta' + \beta''}.$$

XV. Je terminerai ces considérations sur le triangle rectiligne par le théorème suivant :

Dans un triangle quelconque la droite joignant deux points

de contact du cercle inscrit, la droite joignant les pieds de deux perpendiculaires, et celle enfin joignant les points de rencontre de deux bissectrices avec les côtés opposés, vont concourir en un même point.

On détermine ainsi trois points; les droites joignant ces points deux à deux, iront passer par les sommets du triangle, et de plus ces trois points seront tels que l'un quelconque d'entre eux sera le pôle de la droite joignant les deux autres, par rapport au cercle inscrit.

(Voir Gergonne, t. VI, p. 129; t. IX, p. 293; t. X, p. 202; t. XIX, p. 85, 211; t. XXI, p. 65.)