Nouvelles annales de mathématiques

Questions d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 445-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__445_1>

QUESTIONS D'EXAMEN (*V*. t. III, p. 602).

V. Un nombre peut-il être à la fois un carré et un cube parfaits, sans être une sixième puissance?

Non. Soit $z = x^2 = y^3$; d'où $\frac{x^2}{y^2} = y$. Ainsi y est un carré parfait ; donc y^3 ou z est une sixième puissance. Soit, en général, $z = x^m = y^n$; x et y sont entiers, et m et n premiers entre eux. On peut mettre x sous la forme

$$x = \alpha^p \beta^q \ldots\ldots \gamma^r,$$

α, β, γ étant les facteurs nombres premiers ; d'où

$$x^m = \alpha^{pm} \beta^{qm} \ldots\ldots, \gamma^{rm}.$$

Pour que cette expression soit une puissance $n^{ème}$, il faut que les exposants pm, qm...., rm soient des multiples de n ; m et n étant premiers entre eux, p, q...., r doivent être les multiples de n ; donc x est une puissance $n^{ème}$ d'un nombre, et par conséquent z une puissance mn^{eme}.

Un nombre étant simultanément une puissance de degré a_1, a_2...., a_p ; désignant par d le plus petit nombre divisible à la fois par a_1, a_2...., a_p, le nombre donné, entier ou fractionnaire, est une puissance du degré d.

VI. Trouver le nombre entier qui, substitué à la place de x, rend à la fois les deux fractions $\frac{7x-1}{4}$ et $\frac{5x+3}{12}$ entières ; peut-on voir *à priori* que le problème est impossible ? Oui. Si $\frac{5x+3}{12}$ est entier, trois fois ce nombre ou $\frac{5x+3}{4}$ sera aussi entier. Cet entier ajouté à l'entier $\frac{7x-1}{4}$ doit donner un nombre entier ; donc $3x - \frac{1}{2}$ doit être un entier, résultat absurde ; donc le problème est impossible.

Soient les deux fractions $\frac{ax+b}{c}$, $\frac{a'x+b'}{c'}$ qu'il s'agit de rendre entiers ; si, en les ajoutant ou en les retranchant, on obtient une quantité de la forme $mx + \frac{n}{p}$ où m, n, p, sont des entiers, la question est impossible.

I. Conditions pour que les deux tangentes menées d'un même point à une parabole soient égales. Dans une conique quelconque, il faut que le point soit sur un axe principal. En général, soit M un point du lieu des tangentes égales menées à une courbe algébrique ; N et N′ les points de contact, l'axe radical des deux cercles de courbure en N et N′ touche au point M le lieu des tangentes égales.