

**Démonstration de quelques formules d'Euler  
; déduction de celles de Monge. D'après M.  
Grunert, professeur à Brandebourg**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 5  
(1846), p. 414-419

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1846\\_1\\_5\\_\\_414\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__414_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## DÉMONSTRATION

*de quelques formules d'Euler ; déduction de celles de Monge.*

D'après M.Grunert , professeur à Brandebourg. ( Crelle, t.VIII, p. 153, 1832. )

—

1. Soient  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  trois axes rectangulaires, dans le sens des coordonnées positives ;  $Ox''$  un quatrième axe, dans

le sens positif, autour duquel tourne le système des trois axes qui viennent respectivement dans la position  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$ ; on a évidemment :

$$xOx'' = x'Ox'' = \alpha; \quad yOx'' = y'Ox'' = \beta; \quad zOx'' = z'Ox'' = \gamma;$$

soit  $\varphi$  l'angle formé par les plans  $x''Ox$ ,  $x''Ox'$ ; ou bien par  $x''Oy$  et  $x''Oy'$ ; ou encore par  $x''Oz$  et  $x''Oz'$ ; car ces trois angles sont égaux.

2. On a, d'après les formules connues :

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= Ax' + By' + Cz'; & x' &= Ax + A'y + A''z; \\ y &= A'x' + B'y' + C'z'; & y' &= Bx + B'y + B''z; \\ z &= A''x' + B''y' + C''z'; & z' &= Cx + C'y + C''z; \end{aligned} \quad (2)$$

ou

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha x'; & B &= \cos \alpha y'; & C &= \cos \alpha z'; \\ A' &= \cos \gamma x'; & B' &= \cos \gamma y'; & C' &= \cos \gamma z'; \\ A'' &= \cos \beta x'; & B'' &= \cos \beta y'; & C'' &= \cos \beta z'; \end{aligned}$$

prenons une longueur positive  $Ox'' = x''$ , et projetons-la sur les six axes; on aura :

$$x = x' = x'' \cos \alpha; \quad y = y' = x'' \cos \beta; \quad z = z' = x'' \cos \gamma;$$

substituant ces valeurs dans les six équations, et divisant par  $x''$ , il vient :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma; & \cos \alpha &= A \cos \alpha + A' \cos \beta + A'' \cos \gamma \\ \cos \beta &= A' \cos \alpha + B' \cos \beta + C' \cos \gamma; & \cos \beta &= B \cos \alpha + B' \cos \beta + B'' \cos \gamma \\ \cos \gamma &= A'' \cos \alpha + B'' \cos \beta + C'' \cos \gamma; & \cos \gamma &= C \cos \alpha + C' \cos \beta + C'' \cos \gamma; \end{aligned}$$

faisons

$$\begin{aligned} A' - B &= p, \quad A' + B = p'; & A'' - C &= q, \quad A'' + C = q'; \\ B'' - C' &= r, \quad B'' + C' = r'. \end{aligned}$$

On tire de ces six équations les suivantes :

$$\begin{aligned} p \cos \beta + q \cos \gamma &= 0; & p \cos \alpha + r \cos \gamma &= 0; & q \cos \alpha + r \cos \beta &= 0; \\ 2(1 - A) \cos \alpha &= p' \cos \beta + q' \cos \gamma; & 2(1 - B') \cos \beta &= p' \cos \alpha + r' \cos \gamma; \\ 2(1 - C'') \cos \gamma &= q' \cos \alpha + r' \cos \beta, \end{aligned}$$

la trigonométrie sphérique donne :

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi ; & B' &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos \varphi ; \\ C'' &= \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos \varphi ; \end{aligned}$$

substituant dans les trois dernières équations, elles se changent en celles-ci :

$$\begin{aligned} 2\sin^2 \alpha \cos \gamma (1 - \cos \varphi) &= p' \cos \beta + q' \cos \gamma ; \\ 2\sin^2 \beta \cos \alpha (1 - \cos \varphi) &= p' \cos \alpha + r' \cos \gamma ; \\ 2\sin^2 \gamma \sin \alpha (1 - \cos \varphi) &= q' \cos \alpha + r' \cos \beta ; \end{aligned}$$

tirant les valeurs de  $p', q', r'$ , et faisant attention qu'on a

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 ;$$

il vient :

$$\begin{aligned} p' &= 2\cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \varphi) ; & q' &= 2\cos \alpha \cos \gamma (1 - \cos \varphi) ; \\ r' &= 2\cos \beta \cos \gamma (1 - \cos \varphi) ; \end{aligned}$$

$$p = \cos \gamma \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2} ; \quad q = \cos \beta \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2} ; \quad r = \cos \alpha \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2} .$$

Donc, lorsqu'on connaît les neuf quantités  $A, B, C, \dots, C''$  ; on connaîtra  $\alpha, \beta, \gamma$  et aussi  $\varphi$  ; ainsi on peut toujours faire coïncider un angle trièdre rectangle, avec un autre de même sommet, au moyen d'une seule rotation autour d'un axe ; et la position de cet axe est déterminée par les angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ; cherchons  $p, q, r$  en fonctions de ces angles.

3. Les équations (1) donnent :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x[B'C''] + y[B''C] + z[BC]}{L} ; & y' &= \frac{x[A''C'] + y[\Delta C''] + z[A'C]}{L} ; \\ z' &= \frac{x[A'B''] + y[\Lambda''B] + z[AB]}{L} ; \end{aligned}$$

où les crochets représentent des *binômes alternés*,

$$[B'C''] = B'C'' - B''C$$

et ainsi des autres ;  $L$  est la *résultante*, dénominateur commun ; ayant égard aux équations (2), on a les relations connues ;

$$\begin{aligned}
 [B'C''] &= LA; & [B''C] &= LA'; & [BC'] &= LA''; & [A''C'] &= LB; \\
 [AC''] &= LB'; & [A'C] &= LB''; & [A'B''] &= LC; & [A''B] &= LC'; \\
 & & & & [AB'] &= LC'';
 \end{aligned}$$

mais l'on a aussi :

$$\begin{aligned}
 A^2 + A'^2 + A''^2 &= 1; & B^2 + B'^2 + B''^2 &= 1; & A''^2 + B''^2 + C''^2 &= 1, \\
 \text{d'où} & & A'^2 + B^2 &= 1 - A^2 - B'^2 - C''^2.
 \end{aligned}$$

Combinant cette dernière équation avec celle-ci

$$A'B = AB' - LC'';$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
 (A' - B)^2 &= p^2 = 1 + C''^2 - (A + B')^2 + 2LC'' = \\
 &= (1 + C''^2) - (A + B')^2 - 2(1 - L)C'' \\
 (A' + B)^2 &= p'^2 = 1 + C''^2 - (A - B')^2 + 2LC'' = \\
 &= (1 - C''^2) - (A - B')^2 + 2(1 - L)C'';
 \end{aligned}$$

or :

$$1 - C'' = \sin^2 \gamma (1 - \cos \varphi); \quad A - B' = (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) (1 - \cos \varphi);$$

$$\text{d'où} \quad (1 - C'')^2 - (A - B')^2 = 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta (1 - \cos \varphi)^2;$$

$$p'^2 = 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta (1 - \cos \varphi)^2 + 2(1 - L)C'';$$

comparant cette valeur de  $p'^2$  avec celle qu'on a trouvée ci-dessus; on en conclut  $L = 1$ ; donc  $p^2 = (1 + C''^2) - (A + B')^2$ ;

or :

$$\begin{aligned}
 1 + C'' + A + B' &= 1 + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \cos \varphi = \\
 &= 2(1 + \cos \varphi);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 + C'' - A - B' &= 1 + \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) \times \\
 &\quad \cos \varphi = 2 \cos^2 \gamma (1 - \cos \varphi);
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad p^2 = 4 \cos^2 \gamma \sin^2 \varphi; \quad p = \pm 2 \cos \gamma \sin \varphi;$$

et par conséquent

$$q = \mp 2 \cos \beta \sin \varphi; \quad r = \pm 2 \cos \alpha \sin \varphi;$$

mais

$$A' = \frac{1}{2}(p + p'); \quad B = \frac{1}{2}(p' - p); \quad A'' = \frac{1}{2}(q + q'), \quad C = \frac{1}{2}(q' - q),$$

$$B'' = \frac{1}{2}(r' + r), \quad C' = \frac{1}{2}(r' - r);$$

conséquemment l'on a :

$$\begin{aligned} A &= \sin^2\alpha\cos\varphi + \cos^2\alpha; & A' &= \pm\cos\gamma\sin\varphi + \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi); \\ & & A'' &= \mp\cos\beta\sin\varphi + \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi); \\ B &= \sin^2\beta\cos\varphi + \cos^2\beta; & B' &= \pm\cos\alpha\sin\varphi + \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi); \\ & & B'' &= \mp\cos\gamma\sin\varphi + \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi); \\ C &= \sin^2\gamma\cos\varphi + \cos^2\gamma; & C' &= \pm\cos\beta\sin\varphi + \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi); \\ & & C'' &= \mp\cos\alpha\sin\varphi + \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi). \end{aligned}$$

Les doubles signes sont relatifs à l'axe de rotation  $Ox''$  selon qu'il est pris dans l'angle dièdre, ou qu'on en prenne le prolongement dans l'angle opposé; ces belles formules sont celles qu'Euler a données dans le tome XX des *Nouveaux Mémoires de Saint-Petersbourg*, 1775, pour le mouvement de rotation, et sur lesquelles M. Jacobi a attiré l'attention en les citant (*Crelle*, t. II, p. 188), à cause de leur élégance, mais sans en donner la démonstration.

$$\begin{aligned} 4. \text{ On a : } & 1+A+B'+C' = 2(1+\cos\varphi) = M \\ & 1+A-B'-C'' = 2\cos^2\alpha(1-\cos\varphi) = N \\ & 1-A+B'-C'' = 2\cos^2\beta(1-\cos\varphi) = P \\ & 1-A-B'+C'' = 2\cos^2\gamma(1-\cos\varphi) = Q; \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2A' &= p'+p = \sqrt{PN} + \sqrt{MQ}; & 2B'' &= r'+r = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN}; \\ & & 2C &= q'-q = \sqrt{PM} + \sqrt{QN}; \\ 2B &= p'-p = \sqrt{PN} - \sqrt{MQ}; & 2C' &= r'-r = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}; \\ & & 2A'' &= q'+q = \sqrt{QN} - \sqrt{PM}. \end{aligned}$$

Ces remarquables formules ont été données la première fois par Monge (V. t. I, p. 504); on ne sait comment il y est parvenu; on voit qu'elles sont une conséquence de celles d'Euler; ainsi parmi les neuf quantités  $A, B, \dots, C''$ , connaissant trois, telles que  $A, B', C''$ , on en déduit les six autres; ce qui doit être, puisqu'il existe entre elles les six équations :

$$\begin{aligned} A^2+B^2+C^2=1; \quad A'^2+B'^2+C'^2=1; \quad A''^2+B''^2+C''^2=1; \\ AA'+BB'+CC'=0; \quad AA''+BB''+CC''=0; \quad A'A''+B'B''+C'C''=0. \end{aligned}$$

5. M. Grunert indique encore la relation suivante :

$$A'^2-B'^2=B''^2-C''^2=C^2-A''^2=\pm 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

Tm.