

H. HENNE

**Problème sur deux coniques qui se touchent,
proposé au concours d'École normale, 1843**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 405-406

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__405_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME

sur deux coniques qui se touchent ; proposé au concours d'école normale, 1843 (V. t. II, p. 410).

PAR M. H. HENNE,
de Douai.

—

Deux courbes du second degré étant tangentes l'une à l'autre en deux points, démontrer analytiquement que si d'un point quelconque de la droite qui joint les deux points, on mène les quatre tangentes à ces courbes, les points de contact sont en ligne droite.

Soient

$$\begin{aligned} Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F &= 0, \\ A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' &= 0, \end{aligned}$$

les équations des deux courbes.

Je prends la droite AB (*fig. 41 bis*) pour axe des y et la tangente en B pour axe des x .

Je fais $x = 0$, et j'indique que les deux équations résultantes ont chacune une racine nulle; et que les deux autres racines sont égales.

Ce qui donne $F = 0$; $F' = 0$; $\frac{D}{A} = \frac{D'}{A'}$.

Les équations deviennent alors en divisant tous les coefficients par A et par A' :

$$\begin{aligned} y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex &= 0, \\ y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x &= 0. \end{aligned}$$

Je fais ensuite $y = 0$ et j'indique que les deux équations

ont chacune deux racines nulles. Ce qui me donne les nouvelles conditions $E=0$; $E'=0$.

J'obtiens donc en définitive les deux équations

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy = 0, \quad (1)$$

$$y^2 + B'xy + C'x^2 + Dy = 0 ; \quad (2)$$

or, si j'appelle β l'ordonnée d'un point quelconque C de la droite AB, les cordes de contact des tangentes passant par ce point seront

$$(2\beta + D) y + B\beta x + D\beta = 0,$$

$$(2\beta + D) y + B'\beta x + D\beta = 0.$$

Pour prouver que ces deux équations sont identiques, il suffit de démontrer que $B' = B$. Pour cela, j'élimine y^2 entre les équations (1), (2)... et je divise le résultat par x . J'obtiens

$$(B - B') y + (C - C') x = 0,$$

qui représente la droite AB ; identifiant avec l'équation $x=0$. J'obtiens $B=B'$, donc les deux cordes de contact sont identiques et par conséquent les quatre points sont en ligne droite.

C. Q. F. D.

Nota. Deux coniques à double contact peuvent être considérées comme les perspectives de deux cercles concentriques (*Prop. projectives*, p. 65) dont la corde de contact est à l'infini ; considérant un point à l'infini comme pôle, sa polaire est un diamètre commun aux deux cercles ; et ce diamètre commun est la perspective de la polaire du point C par rapport aux deux coniques ; donc , etc.

Tm.