

AYNARD

Note sur le sinus de la moitié d'un arc

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 399-401

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__399_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur le sinus de la moitié d'un arc,

PAR M. AYNARD,
Professeur de mathématiques.

Lorsque l'on donne le sinus d'un arc, et que l'on cherche à exprimer en fonction de cette unique donnée le sinus et le cosinus de sa moitié, on obtient, en combinant les deux équations,

$$2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha,$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha + \sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1;$$

les deux relations suivantes :

$$\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 + \sin\alpha},$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha};$$

d'où l'on déduit facilement les valeurs cherchées :

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha},$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Aucune difficulté ne se présente lorsque l'on suppose, ainsi que l'énoncé du problème le comporte, que l'arc α est donné par son sinus; chacune des expressions a quatre valeurs à cause de la duplicité des signes dont chacun des radicaux peut être affecté, et l'on vérifie trigonométriquement qu'il en doit être ainsi. Mais, si l'arc α est donné par lui-même conjointement avec son sinus, il est clair qu'une seule détermination doit être acceptée pour le sinus de sa moitié et il reste à trouver le signe qui, dans ce cas, affecte chaque radical, ou, en d'autres termes, à préciser, dans l'équation (2), le signe des sommes

$$\sin \frac{1}{2} \alpha + \cos \frac{1}{2} \alpha, \quad \text{et} \quad \sin \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

On peut y parvenir plus simplement qu'on ne le fait ordinairement par les considérations suivantes. On a :

$$\sin \frac{1}{2} \alpha + \cos \frac{1}{2} \alpha = \sin \frac{1}{2} \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha \right),$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha = \sin \frac{1}{2} \alpha - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha \right),$$

ou, en développant les seconds membres de ces égalités d'après les formules qui servent à transformer en un produit, soit la somme, soit la différence de deux sinus :

$$\sin \frac{1}{2} \alpha + \cos \frac{1}{2} \alpha = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha - \cos \frac{1}{2} \alpha = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

On voit par là que les signes des radicaux sont ceux de

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et de} \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

mais, puisque l'arc α est connu, l'arc $\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$ pourra être calculé; l'on saura dans quel quadrant tombe son extrémité, et par suite le signe de son sinus et de son cosinus. Toute ambiguïté relative aux signes des radicaux disparaîtra par là même (V. p. 49).