

DROT

**Note sur la résolution d'une classe
particulière d'équations à plusieurs
inconnues**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 389-394

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__389_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

*sur la résolution d'une classe particulière d'équations
à plusieurs inconnues.*

PAR M. DROT,

Admissible à l'Ecole normale.

Cette note est relative à la résolution des équations à plusieurs inconnues, dans chacune desquelles les inconnues ont les mêmes exposants et les mêmes coefficients; c'est-à-dire que ces équations peuvent être toujours ramenées à la forme

$$x^m + y^m + z^m + u^m + \dots = a.$$

1° Je supposerai d'abord qu'il s'agisse de deux équations à deux inconnues, de la forme

$$x^m + y^m = a$$

$$x^n + y^n = b.$$

Je prendrai pour inconnues auxiliaires la somme $x+y=u$ des racines, et leur produit $xy=v$. Il est clair que u et v étant connus, x et y seront les deux racines de l'équation du second degré $X^2 - uX + v = 0$. Or il est facile d'obtenir deux relations entre u et v qui les feront connaître. En effet, élevons les deux membres de l'équation $x+y=u$ à la puissance m , il viendra

$$x^m + y^m + mxy(x^{m-2} + y^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 y^2 (x^{m-4} + y^{m-4}) + \dots = u^m.$$

Si m est pair, le premier nombre se terminera par

$$+ \frac{m(m-1) \dots \left(\frac{m}{2} + 1\right)}{1.2.3 \dots \frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}};$$

S'il est impair, ce sera par

$$+ \frac{m(m-1) \dots \left(m - \frac{m-1}{2} + 1\right)}{1.2.3. \dots \frac{m-1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}} y^{\frac{m-1}{2}} (x+y).$$

L'équation $(x+y)^m = u^m$ devient donc ainsi :

$$a + m\nu(x^{m-1} + y^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1.2} \nu^2(x^{m-2} + y^{m-2}) + \dots = u^m.$$

Or $x^{m-1} + y^{m-1}$, $x^{m-2} + y^{m-2}$, $\dots$ pourront toujours être exprimés en fonction d'une somme de puissances de x et de y plus petites; car, élevant les deux membres de $x+y = u$ successivement aux puissances $m-2$, $m-4$, $\dots$ on pourra en tirer $x^{m-2} + y^{m-2}$, $x^{m-4} + y^{m-4}$, $\dots$ en fonction de u , de ν , et de binômes plus simples que les précédents. En continuant ainsi, ces binômes pourront être exprimés en fonction de $x+y$ ou de u , ou de ν ; de sorte que l'équation $(x+y)^m = u^m$ deviendra :

$$a + m\nu f(u, \nu) + \frac{m(m-1)}{1.2} \nu^2 f_2(u, \nu) + \dots = u^m,$$

c'est-à-dire en général $F_1(u, \nu) = 0$.

En élevant ensuite les deux membres de $x+y = u$ à la puissance n , il viendra une autre équation $F_2(u, \nu) = 0$, entre u et ν . Les deux équations F_1 et F_2 détermineront souvent d'une manière facile u et ν , du moins dans les cas peu compliqués.

Faisons quelques applications.

Soit à résoudre les équations

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x^3+y^3 &= b. \end{aligned}$$

Ici la somme des racines étant connue, il n'y a qu'à prendre pour inconnue auxiliaire le produit $xy = \nu$. Élevons les deux

membres de $x + y = a$ à la quatrième puissance, il viendra :

$$x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = a^4,$$

ou
$$b + 4\nu(x^2 + y^2) + b\nu^2 = a^4,$$

en élevant les deux membres de la même équation au carré, il vient : $x^2 + y^2 = a^2 - 2\nu$; donc on a :

$$b + 4\nu(a^2 - 2\nu) + b\nu^2 = a^4$$

ou
$$2\nu^2 - 4a^2\nu + a^4 - b = 0.$$

On tire de là : $\nu = a^2 \pm \sqrt{a^4 - \frac{a^4 + b}{2}} = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + b}{2}}.$

Par suite
$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{3a^2}{4} \pm \sqrt{\frac{a^4 + b}{2}}}$$

$$y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{3a^2}{4} \mp \sqrt{\frac{a^4 + b}{2}}}.$$

Soit encore à résoudre les équations

$$x^3 + y^3 = a$$

$$x^4 + y^4 = b.$$

Posons $x + y = u$, $xy = \nu$. Élevant les deux membres de $x + y = u$ successivement aux puissances 3 et 4, il vient :

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = u^3,$$

ou
$$a + 3u\nu = u^3,$$

et

$$x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = u^4, \text{ ou } b + 4\nu(u^2 - 2\nu) + 6\nu^2 = u^4,$$

ou enfin
$$2\nu^2 - 4\nu u^2 + u^4 - b = 0.$$

Tirant ν de la première, et remplaçant dans la seconde, l'élimination sera faite.

2° Soient maintenant les trois équations

$$x^m + y^m + z^m = a$$

$$x^n + y^n + z^n = b$$

$$x^p + y^p + z^p = c.$$

Je prendrai pour inconnues auxiliaires les expressions

$$x + y + z = u, \quad xy + xz + yz = v, \quad xyz = t;$$

alors x, y, z seront les trois racines de l'équation du troisième degré $X^3 - uX^2 + vX - t = 0$, et une fois u, v, t connus, la question sera résolue. Or, en élevant les deux membres de l'équation $x + y + z = u$ à la puissance m , à la puissance n et à la puissance p , on comprend que, par des transformations semblables à celles que l'on a faites dans la première partie, on puisse arriver à des équations de la forme

$$F_1(u, v, t) = 0, \quad F_2(u, v, t) = 0, \quad F_3(u, v, t) = 0,$$

qui feront connaître u, v, t .

Prenons pour application les trois équations

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b \\ x^3 + y^3 + z^3 &= c. \end{aligned}$$

Ici je dois prendre pour inconnues auxiliaires

$$xy + yz + xz = u, \quad xyz = v.$$

Élevant les deux membres de $x + y + z = a$ au carré, il vient :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = a^2,$$

ou
$$b + 2u = a^2.$$

Élevant ensuite les deux membres de la même équation au cube, il vient :

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(xy + yz + xz)(x + y + z) - 3xyz = a^3,$$

ou
$$c + 3au - 3v = a^3.$$

La première équation donne $u = \frac{a^2 - b}{2}$, et la deuxième,

$$v = \frac{c + \frac{3a(a^2 - b)}{2} - a^3}{3}, \text{ et le problème est résolu.}$$

Il faut bien remarquer que cette méthode ne doit être employée que dans les cas les plus généraux. Dans certains cas simples, il y aura souvent autant d'avantage à opérer autrement.

Ainsi dans le cas des équations :

$$x + y + z = a,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

il y a autant d'avantage à prendre pour inconnue auxiliaire $xy = u$, et à élever successivement l'équation $x + y = a - z$ au carré et au cube, ce qui donnera finalement deux équations en u et z ; mais une des équations sera du troisième degré en z , et par conséquent ne pourra être résolue algébriquement.

Si l'on avait les équations :

$$x + y + z = a,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = c,$$

on pourrait trouver les valeurs des racines en employant cette dernière méthode, et en posant de plus $a - z = t$.

Si l'on avait quatre équations de la forme :

$$x^m + y^m + z^m + u^m = a,$$

$$x^n + y^n + z^n + u^n = b,$$

$$x^p + y^p + z^p + u^p = c,$$

$$x^q + y^q + z^q + u^q = d,$$

la méthode générale serait la même, et on prendrait pour inconnues auxiliaires :

$$x + y + z + u = v,$$

$$xy + yz + zu + xz + xu + yu = t,$$

$$xyz + yzu + xyu + xzu = s,$$

$$xyz = w;$$

et x, y, z, u , seraient les quatre racines de l'équation

$$X^4 - pX^3 + qX^2 - rX + w = 0.$$

On comprend la loi de résolution pour plus de quatre équations.

Note. Cette méthode revient à trouver les coefficients d'une équation de degré n , lorsqu'on connaît les valeurs de n fonctions symétriques des racines de cette équation ; fonctions symétriques qui sont toujours exprimables en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation, et ces nouvelles n équations sont le plus souvent plus compliquées que les équations données. Tm.