

T. CLAUSEN

Problème sur les angles dièdres du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 374-375

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__374_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME

sur les angles dièdres du tétraèdre.

par M. T. Clausen (Crelle, t. VIII, p. 138, 1832). (*)

Problème. Trouver une relation entre les six angles dièdres d'un tétraèdre.

Solution. Soient A, B, C, D les quatre points de contact des faces du tétraèdre avec la sphère inscrite ; joignant ces points deux à deux par les arcs de grands cercles AB, BC, CA, CD, AD, BD, désignés respectivement par $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, on obtient quatre triangles sphériques dont les côtés sont les suppléments des angles dièdres du tétraèdre ; soient $\theta, \theta', \theta''$ les trois angles sphériques formés en D ; on a, d'après les formules connues dans les triangles formés par les côtés α, β', β'' :

$$\cos \theta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta' \cos \beta''}{\sin \beta' \sin \beta''}.$$

De même :

$$\cos \theta' = \frac{\cos \alpha' - \cos \theta'' \cos \beta}{\sin \beta'' \sin \beta} ; \quad \cos \theta'' = \frac{\cos \alpha'' - \cos \beta \cos \beta'}{\sin \beta \sin \beta'}.$$

(*) Le même problème a été résolu par plusieurs. Voir Gergonne, t. VI, p. 253 ; la solution de M. Clausen renferme une simplification finale.

or $0 + \theta' + \theta'' = 2\pi.$

Donc $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta \cos\theta' \cos\theta'' = 0.$

Et de là, en mettant pour les cosinus, leurs valeurs :

$$\begin{aligned} & \sin^2\beta \sin^2\beta' \sin^2\beta'' - \sin^2\beta [\cos\alpha - \cos\beta' \cos\beta'']^2 - \\ & - \sin^2\beta' [\cos\alpha' - \cos\beta \cos\beta'']^2 - \sin^2\beta'' [\cos\alpha'' - \cos\beta \cos\beta']^2 + \\ & + 2[\cos\alpha - \cos\beta' \cos\beta''] [\cos\alpha' - \cos\beta \cos\beta''] [\cos\alpha'' - \cos\beta \cos\beta'] = 0. \end{aligned}$$

ou, d'après une facile réduction :

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha' - \cos^2\alpha'' + 2\cos\alpha \cos\alpha' \cos\alpha'' - \sin^2\alpha \cos^2\beta - \\ - \sin^2\alpha' \cos^2\beta' - \sin^2\alpha'' \cos^2\beta'' + 2\cos\beta' \cos\beta'' (\cos\alpha - \cos\alpha' \cos\alpha'') + \\ + 2\cos\beta'' \cos\beta (\cos\alpha' - \cos\alpha'' \cos\alpha) + \\ + 2\cos\beta \cos\beta' (\cos\alpha'' - \cos\alpha \cos\alpha') = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Désignons par $\lambda, \lambda', \lambda''$ les angles opposés aux côtés $\alpha, \alpha', \alpha''$ dans le triangle formé par ces côtés, il vient :

$$\begin{aligned} \cos\alpha - \cos\alpha' \cos\alpha'' &= \cos\lambda \sin\alpha' \sin\alpha'', \\ \cos\alpha' - \cos\alpha \cos\alpha'' &= \cos\lambda' \sin\alpha'' \sin\alpha, \\ \cos\alpha'' - \cos\alpha \cos\alpha' &= \cos\lambda'' \sin\alpha \sin\alpha'. \end{aligned}$$

Faisons $\mu = \sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha' + \alpha''); \quad b = \sin\alpha \cos\beta;$

$$\mu' = \sin \frac{1}{2} (-\alpha + \alpha' + \alpha''); \quad b' = \sin\alpha' \cos\beta';$$

$$\mu'' = \sin \frac{1}{2} (\alpha - \alpha' + \alpha''); \quad b'' = \sin\alpha'' \cos\beta'';$$

$$\mu''' = \sin \frac{1}{2} (\alpha + \alpha' - \alpha'').$$

La formule (1) devient, d'après des relations connues :

$$b^2 + b'^2 + b''^2 - 2b'b''\cos\lambda - 2bb''\cos\lambda' - 4\mu\mu'\mu''\mu''' = 0;$$

relation cherchée.

On a d'ailleurs .

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda' = \frac{\mu'' \mu'}{\mu \mu''}; \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda'' = \frac{\mu' \mu''}{\mu \mu''},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda = \frac{\mu'' \mu'''}{\mu \mu'}.$$