

TERQUEM

**Discussion de la surface du troisième
degré, donnée par l'équation**

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 370-374

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_370_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISCUSSION

de la surface du troisième degré, donnée par l'équation

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

—

Avis. — Les élèves qui savent discuter cette sorte de surfaces, connaissent les coniques; ceux qui ne savent pas les discuter, ne connaissent pas les coniques; critérium infailible.

Pour fixer les idées, nous supposons que les cinq coefficients constants sont positifs; γ = angle des x, y ;

β = angle des x, z ; α = angle des y, z .

A. *Sections parallèles au plan des xy .*

I. Les sections parallèles au plan xy sont des coniques; considérant z comme une constante, nous aurons

$$m = B^2 - 4Cz; \quad k = 2Ez - BD; \quad k' = 2CD - BE, \quad l = D^2 - 4Fz; \\ l' = E^2 - 4CF; \quad n = DE - 2BF;$$

$$L = l'z - BDE + CD^2 + FB^2 = l'z + Q. \quad N = A + C - B\cos\gamma, \\ (\text{V. t. I, p. 489}).$$

II. *Lieu des centres des sections parallèles.* Soient X, Y, z les coordonnées du centre d'une section, on a :

$$X = \frac{2Ez - BD}{B^2 - 4Cz}; \quad Y = \frac{k'}{B^2 - 4Cz},$$

éliminant z , il vient $k'(2Cx + By + E) = 0$.

1^{er} cas. k' n'est pas nul.

On a donc $2Cx + By + E = 0$ (1); le lieu des centres est dans le plan parallèle à l'axe des z , et dont la trace sur le plan

xy est donnée par l'équation (1) ; la projection de ce lieu, soit sur le plan des xz , soit sur celui de yz , est une hyperbole ; donc ce lieu étant plan , est aussi une hyperbole.

Cherchons l'équation de cette courbe dans son plan. A cet effet , prenons la droite (1) pour axe des x , et pour origine le point où cette droite rencontre l'axe des y , et conservons l'axe des z ; nommons δ l'angle que fait la droite (1) avec l'axe des y ; on aura $x, \sin \delta = x \sin \gamma$, x , désignant l'abscisse de l'hyperbole dans son plan ; donc $\frac{x, \sin \delta}{\sin \gamma} = \frac{2Fz - BD}{B^2 - 4Cz}$; donc l'équation de l'hyperbole dans son plan est

$$4Czx, \sin \delta + 2Ez \sin \gamma - B'x, \sin \delta - BD \sin \gamma = 0 ;$$

les asymptotes sont parallèles aux axes ; les coordonnées du centre sont $Z = -\frac{E \sin \gamma}{2C \sin \delta}$; $X, = \frac{B^2}{4C}$; appelons cette courbe *l'hyperbole centrale*.

$$a) ; \quad z \text{ positif et } < \frac{B^2}{4C} ; \quad l' > 0 ; \quad Q > 0.$$

Chaque section est une hyperbole ayant son centre sur l'hyperbole centrale ; plus z augmente et plus l'axe focal augmente, et plus le centre s'éloigne.

$$b) ; \quad z = \frac{B^2}{4C} ; \quad l' > 0 ; \quad Q > 0.$$

Pour cette valeur de z , celle de x , est infinie ; le centre de l'hyperbole est situé à l'infini ; chaque branche de l'hyperbole devient une parabole ; situées, l'une à une distance finie, et l'autre à l'infini ; de sorte que depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{B^2}{4C}$ la surface est formée de deux nappes : l'une que nous désignons par nappe de *droite* commence par une hyperbole pour $z = 0$, et se termine par une parabole pour $z = \frac{B^2}{4C}$;

l'autre que nous désignons par nappe de *gauche* commence aussi par une branche d'hyperbole, et s'approche asymptotiquement du plan $z = \frac{B^2}{4C}$.

$$c) \quad z > \frac{B^2}{4C}; \quad l' > 0; \quad Q > 0.$$

La nappe de gauche disparaît; celle de droite se continue; mais les sections sont des ellipses qui vont toujours en s'aplatissant; et pour z infini, l'ellipse se réduit à son grand axe; de sorte qu'en désignant par Z' ce demi grand axe, on a pour z infini $Z'^2 = \frac{4LN}{m^2} = \frac{4C^2}{l'}$ (t. I, p. 493); c'est par cette portion de droite Z' que se termine à l'infini la nappe de droite; on voit ici la transition immédiate de l'hyperbole à la parabole, et de celle-ci à l'ellipse, et finalement de celle-ci à la droite limitée.

$$d) \quad z \text{ négatif}; \quad l' > 0; \quad Q > 0; \quad Q + l'z > 0.$$

Les deux nappes se continuent au-dessous du plan xy , par des branches d'hyperboles dont les axes focaux vont en diminuant à mesure que z croît négativement.

$$e) \quad z \text{ négatif}; \quad l' > 0; \quad Q > 0; \quad Q + l'z = 0.$$

Les deux nappes se pénètrent suivant deux droites dont le système est représenté par l'équation

$$\frac{l'}{Q}x^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (\text{t. II, p. 30});$$

les deux nappes se séparent ensuite et se continuent par des branches hyperboliques, qui se ferment et se rapprochent de plus en plus de leurs axes focaux, et enfin pour $z = -\infty$, les deux branches de l'hyperbole se réduisent aux prolongements infinis dans les deux sens, de l'axe focal dont le carré est égal à $\frac{l'}{C}$ (t. I, p. 493).

2^{me} cas. $k' = 0$.

L'hyperbole centrale est alors située dans le plan des xz , et il n'y a rien à changer dans la discussion.

III. Dans ce qui précède, nous avons toujours supposé l' et Q positifs; admettons maintenant que Q soit négatif, et remarquons qu'on a l'identité $\frac{B^2}{4C} + \frac{Q}{l'} = \frac{k'^2}{4Cl'}$.

$$a) \quad z > \frac{B^2}{4C}; \quad l' > 0; \quad Q < 0.$$

A cause de l'identité, on ne peut avoir $z = -\frac{Q}{l'}$ ou $L = 0$; donc l'hyperbole ne peut se changer en deux droites, et les deux nappes supérieures restent séparées

$$b) \quad z = \frac{B^2}{4C}; \quad l' > 0; \quad Q < 0.$$

L'hyperbole atteint sa limite parabolique.

$$c) \quad z \text{ positif} < \frac{B^2}{4C}; \quad l' > 0; \quad Q < 0.$$

On peut avoir $z = \frac{Q}{l'}$; ou $L = 0$; l'ellipse se réduit en un point; de sorte que le plan $z = \frac{Q}{l'}$ est tangent à la nappe de droite.

$$d) \quad z \text{ négatif}; \quad l' > 0; \quad Q < 0.$$

L ne peut jamais devenir nul; par conséquent au-dessus du plan xy , les deux nappes restent toujours séparées, et se terminent encore à l'infini par deux droites.

B. Sections parallèles au plan xz .

Toutes ces sections sont des paraboles.

C. Sections parallèles au plan des yz.

Courbes du troisième degré, à deux asymptotes, dont l'une est double ou de l'espèce parabolique.

Nous engageons les élèves à construire ces courbes ; à discuter le cas où $l' < 0$; et à construire la surface où B est remplacé par z, etc....

Tm.