

GUSTAVE DE BAILLEUL

**Théorème sur l'ellipse et l'hyperbole,
de mêmes axes principaux**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 368-369

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_368_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME

sur l'ellipse et l'hyperbole, de mêmes axes principaux.

PAR M. GUSTAVE DE BAILLEUL,

Elève externe du collège Saint-Louis.

La question à résoudre est la suivante : On donne une ellipse et une hyperbole (fig. 38) ayant les mêmes axes (*). On mène une tangente en un point quelconque O de l'hyperbole. Puis par les points d'intersection P et Q de cette tangente avec l'ellipse, on mène deux tangentes à l'ellipse, qui se rencontrent en M. Trouver le lieu des points M.

Solution. Soient x', y' les coordonnées du point O; x'', y'' celles du point M.

La droite PQ peut être considérée et comme tangente à l'hyperbole, et comme corde de contact du point M. Donc on a pour cette droite les deux équations suivantes :

$$(1) \quad a^2 y y' - b^2 x x' = -a^2 b^2$$

$$(2) \quad a^2 y y'' + b^2 x x'' = +a^2 b^2$$

et l'équation de l'hyperbole est $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$.

Si des équations (1) et (2) je tire la valeur de y , j'aurai

$$y = \frac{b^2 (x x' - a^2)}{a^2 y'} \quad \text{pour l'équation (1)}$$

$$y = \frac{-b^2 (x x'' - a^2)}{a^2 y''} \quad \text{pour l'équation (2)}$$

(*) Coniques supplémentaires de M. Poncelet.

Or, ces deux résultats doivent être identiques ; ce qui exige que l'on ait $y' = -y''$ et $x' = x''$ (5).

Donc si dans l'équation $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$ je remplace x' et y' par leurs valeurs, j'aurai l'équation suivante

$$a^2y''^2 - b^2x''^2 = -a^2b^2.$$

Donc le lieu cherché est l'hyperbole elle-même, et les valeurs de y' et x' nous apprennent en outre qu'en construisant l'ordonnée du point O et en la prolongeant jusqu'à sa rencontre avec l'autre branche de l'hyperbole, le point d'intersection est précisément celui des tangentes à l'hyperbole.

Note. Le théorème peut s'énoncer ainsi : une ellipse et une hyperbole ayant les mêmes axes principaux ; un point pris sur une de ces courbes a pour polaire relativement à la seconde courbe, une tangente à la première courbe.

Démonstration. Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{équation de l'ellipse.}$$

$$a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2 \quad \text{équation de l'hyperb.}$$

Soit x', y' coordonnées d'un point pris sur l'ellipse, sa polaire par rapport à l'hyperbole a pour équation

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

Or, ceci est aussi l'équation d'une tangente à l'ellipse ayant pour point de contact x' et $-y'$; donc, etc.

Corollaire. Chacune de ces courbes se confond avec sa polaire réciproque, prise par rapport à l'autre courbe ; ainsi considéré, le théorème est d'une vérité intuitive.

Le théorème subsiste encore lorsque les deux courbes ont en commun le même système de diamètres conjugués, de grandeur et de position, et il est facile de voir qu'on peut aussi l'étendre à un ellipsoïde et à un hyperboloïde à deux nappes, ayant un même système de diamètres conjugués, de grandeur et de position. Les moyens de démonstration sont les mêmes que ci-dessus. Tm.