

VAUQUELIN

WOESTYN

Problème 119

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 361-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__361_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME 119, p. 202.

PAR MM. VAUQUELIN ET WOESTYN,

Élèves de l'École normale.

Une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes données dans l'espace, chaque point de la droite mobile décrit une ellipse. Toutes les ellipses sont dans des plans parallèles; leurs centres sont sur la plus courte distance entre les droites fixes, le lieu des ellipses est une surface du quatrième degré; la droite mobile tourne à chaque instant autour d'une droite de direction constante perpendiculaire aux deux plans parallèles déterminés par les droites fixes.

$AB, A'B'$ (*fig. 37*) sont les deux droites fixes; AA' leur perpendiculaire commune. Je prendrai cette dernière droite pour axe des x , et pour origine le milieu O de la distance AA' . Un plan mené par le point O perpendiculairement à l'axe des x sera le plan des zy ; l'axe des z sera la bissectrice de l'angle formé dans ce plan en menant par le point O

des parallèles aux deux droites fixes ; l'axe des y sera une perpendiculaire à cette droite.

Les équations des deux directrices et de la droite mobile seront :

$$\left. \begin{array}{l} x = h \\ y = az \end{array} \right\} ; \quad \left. \begin{array}{l} x = -h \\ y = -az \end{array} \right\} ; \quad \left. \begin{array}{l} x = mz + p \\ y = nz + q \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}.$$

La génératrice devant rencontrer chacune des directrices, on aura les deux équations :

$$(h - p)(a - n) = qm, \quad (\alpha)$$

$$(h + p)(a + n) = qm. \quad (\beta)$$

La droite interceptée doit être d'une longueur constante que je représenterai par $2r$; ce qui fournit une troisième relation :

$$h^2 + a^2 p^2 = m^2 (r^2 - h^2). \quad (3)$$

Au lieu des équations (α) et (β) , on peut prendre celles que l'on obtient en les additionnant ou les soustrayant :

$$ha + pn = qm, \quad (4)$$

$$nh + ap = 0. \quad (5)$$

Je dis d'abord que la génératrice en se mouvant fait un angle constant avec l'axe des x ; on a, en appelant α cet angle : $\cos^2 \alpha = \frac{m^2}{m^2 + n^2 + 1}$; je substitue à m^2 et n^2 leurs valeurs tirées des équations (3) et (5), $\frac{h^2 + a^2 p^2}{r^2 - h^2}$, $\frac{a^2 p^2}{h^2}$: je trouve alors :

$$\cos^2 \alpha = \frac{h^2}{r^2}.$$

Le second membre est plus petit que l'unité, puisque la perpendiculaire commune est la plus courte ligne que l'on puisse mener entre deux droites données : de plus il est constant. Il suit de là que la génératrice se meut en faisant constamment le même angle avec l'axe des x .

Chaque génératrice fera de même avec un plan mené par une des directrices parallèlement à l'autre, un angle constant qui sera le complémentaire de α . Il en résulte alors qu'un même point de la droite interceptée restera dans un plan perpendiculaire à l'axe des x , puisque, dans chaque position de la génératrice, la distance au plan mené par l'une des directrices parallèlement à l'autre sera constante.

Il est facile de voir que ce point décrira une ellipse. Je projette, pour cela, les deux directrices en ab , ab' sur le plan de la courbe cherchée, les différentes génératrices se projettent suivant des lignes de longueur constante $[2r \sin \alpha]$ inscrites dans l'angle bab' ; or on sait qu'un point quelconque de la projection de la génératrice décrit pendant son mouvement une ellipse dont le centre est en a , c'est-à-dire sur la plus courte distance.

Je vais chercher l'équation de la surface engendrée par la droite mobile; il me faut pour cela éliminer, entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), les quatre quantités m , n , p , q ; l'équation en x , y , z qui résultera sera l'équation de la surface cherchée.

Les équations (1), (2), (4), (5) donnent pour m et p les valeurs suivantes : $m = \frac{a(x^2 - h^2)}{azx - hy}$, $p = \frac{h(ahz - xy)}{azx - hy}$; je porte ces valeurs dans (3), et j'obtiens pour l'équation du lieu :

$$h^2(azx - hy)^2 + a^2h^2(xy - ahz)^2 + a^2(h^2 - r^2)(x^2 - h^2)^2 = 0.$$

Cette équation est bien du quatrième degré.

Je vais démontrer par le calcul qu'un plan perpendiculaire à l'axe des x coupe cette surface suivant une ellipse, résultat que j'ai obtenu plus haut par une autre méthode. Un plan $x = k$ coupera la surface suivant une courbe dont les équations seront :

$$x = k,$$

$$h^2(akz - hy)^2 + ah^2(ky - ahz)^2 + a(h^2 - r^2)(k^2 - h^2)^2 = 0.$$

Cette intersection est une courbe du second degré ; c'est une ellipse, car si je cherche ce que devient la quantité analogue à $B^2 - 4AC$, je trouve à un facteur positif près $-(k^2 - h^2)^2$, quantité négative, mais qui devient nulle pour $k = \pm h$. C'est qu'en effet, les sections faites par les plans dont les équations sont $x = \pm h$ sont les directrices elles-mêmes ; cette ellipse, obtenue par le plan dont l'équation est $x = k$ a son centre sur l'axe des x , puisque les termes du premier degré en y et z manquent dans son équation.

Note. Soit MM' une position quelconque de la droite mobile ; M étant sur AB et M' sur $A'B'$; par les points M et M' menons des droites MI , $M'I'$ respectivement perpendiculaires à AB et $A'B'$, et dans des plans déterminés par les droites fixes. Soit II' la plus courte distance de ces deux perpendiculaires ; et dans les mêmes plans parallèles décrivons des circonférences, des points I et I' comme centres respectifs et avec les rayons IM , $I'M'$: ces circonférences touchent les directrices AB , $A'B'$ en M et M' ; dans une position infiniment voisine, la droite mobile pourra être considérée comme restant sur les deux circonférences ; elle tend donc à décrire un hyperboloïde de révolution autour de l'axe II' , qui est ainsi l'axe instantané de rotation autour duquel la droite MM' tend à tourner ; il est aisé de voir que la distance de II' à AA' reste constante ; donc l'axe instantané de rotation décrit autour de AA' , une surface cylindrique, circulaire, droite. Le plan MII' est perpendiculaire sur la directrice AMB ; de même, le plan $M'I'I'$ est perpendiculaire sur la directrice $A'M'B'$; donc l'axe instantané II' est l'intersection de deux plans menés perpendiculairement aux directrices par les points M et M' .

Si les directrices sont des courbes quelconques, la droite mobile se meut à chaque instant sur des tangentes à ces courbes; donc les intersections des deux plans normaux menés à ces courbes par les points M et M' donnent la position correspondante de l'axe instantané de rotation. L'axe AA' décrit une surface gauche dépendant des deux directrices et de leurs positions dans l'espace. L'axe instantané II' décrit une surface gauche, enveloppe d'une surface cylindrique, circulaire, droite, décrite autour de l'axe variable AA' ; et la droite mobile MM' décrit une surface gauche, enveloppe d'une surface du quatrième degré, à sections parallèles elliptiques. Ces considérations peuvent servir à la solution du problème 120.

Tm.