

DORMOY

Solution du problème 113

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 348-349

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__348_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 113 (page 167).

PAR M. DORMOY,

élève en spéciales.

Problème.

Étant donnée une progression arithmétique de n termes, la moitié de n fois le dernier terme, est toujours comprise entre la somme de tous les termes, et cette somme diminuée du dernier terme ; démontrer cette proposition par la géométrie.

Solution.

L'énoncé suppose évidemment la progression croissante.

Soit donc une pareille progression :

: $a. b. c. d. v. x. y. z.$

Pour la représenter géométriquement, sur une droite indéfinie xy , je porte autant de longueurs égales (*fig. 35*), $AB, BC. . . . VX, XY, YZ$ que la progression renferme de termes moins un ; j'élève aux points $A, B, C. . . . Y, Z$, les perpendiculaires $AA' = a, BB' = b, CC' = c. . . . YY' = y, ZZ' = z$, dont les sommets se trouveront évidemment tous sur la droite $A'Z'$; on peut ainsi représenter une progression arithmétique quelconque.

Cela posé, nous devons avoir :

$$a+b+c+d+ +y+z > \frac{nz}{2} > a+b+c +x+y;$$

il suffira de faire voir que l'on a :

$$2(a+b+c+d+ +y+z) > nz > 2(a+b+ +x+y).$$

A cet effet, prolongeons ZZ' de $Z'Z'' = a$, et AA' de $A'A'' = z$,

tirons la droite $A''Z''$, et prolongeons les perpendiculaires qui représentent les différents termes de la progression ; on voit de suite que $B'B'' = y$; $C'C' = x$

Il suit de là que :

$$AA'' + BB'' + \dots + YY'' + ZZ'' = 2(a + b + c + d \dots + y + z).$$

Mais

$$AA'' + BB'' + \dots + YY'' + ZZ'' = n \cdot ZZ'' = n(a + z),$$

et par conséquent :

$$2(a + b + c + \dots + y + z) = n(z + a);$$

ce qui démontre la première partie de l'inégalité.

De l'expression précédente, nous tirons :

$$2(a + b + \dots + y) = nz + na - 2z;$$

pour que la seconde partie de l'inégalité

$$2(a + b + \dots + x + y) < nz$$

soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait :

$$na < 2z,$$

et cette condition sera nécessaire et suffisante.