

HENRI D'ANDRÉ

Solutions des problèmes 122 et 123

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 331-334

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__331_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DES PROBLÈMES 122 et 123 (p. 202).

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

Problème 122. La portion d'une normale comprise entre une conique et un axe principal multipliée par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente qui passe par

l'extrémité de sa normale donne un produit constant pour le même axe principal.

Ce théorème énoncé, je crois par M. Chasles, d'une manière un peu différente, sert de base à la belle construction donnée par ce géomètre pour déterminer les axes d'une ellipse de grandeur et de position lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués aussi de grandeur et de position; c'est sans doute à cause de cet usage accidentel qu'il a trouvé place dans le cours de géométrie analytique de M. Cirodde, notre professeur. La démonstration analytique de ce théorème est exposée tout au long dans l'ouvrage ci-dessus mentionné; je me suis alors proposé de trouver une démonstration de ce théorème qui fût géométrique autant que possible.

Je prendrai une ellipse pour fixer les idées; la démonstration s'appliquerait à peu de chose près à l'hyperbole.

Je vais démontrer d'abord que

$$OG \times MC' = b^2 \text{ (Fig. 34).}$$

La ligne $F'T$ est divisée harmoniquement aux points

$$F', C, F, T,$$

d'où la proportion

$$F'T : FT :: F'C : FC.$$

Or

$$F'T : FT :: F'H' : FH, \quad F'C : FC :: F'H' - MC : MC - FH.$$

Et à cause du rapport commun

$$F'H' : FH :: F'H' - MC : MC - FH,$$

on en tire :

$$\begin{aligned} F'H' \times MC - FH \times F'H' &= F'H' \times FH - FH \times MC, \\ (F'H' + FH) MC &= 2 FH \times F'H' - FH \times MC, \\ OG \times MC &= b^2. \end{aligned}$$

Reste à faire voir que

$$OG \times MD = a^2.$$

Pour cela rappelons-nous la valeur de l'abscisse à l'origine de la normale, nous aurons :

$$OC = MP \frac{c^2}{a^2} \text{ ou bien } \frac{OC}{MP} = \frac{c^2}{a^2}$$

et à cause des triangles semblables DMP, DOC,

$$\frac{MP}{DC} = \frac{a^2}{c^2},$$

et par suite *dividendo*

$$\frac{MC}{MD} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \frac{MC \times OG}{MD \times OG} = \frac{b^2}{a^2}; \quad MD \times OG = a^2.$$

C. Q. F. D.

Note. Ce problème a été résolu aussi par M. Henri Dormoy.

Problème 123. Si dans une parabole les rayons vecteurs sont en progression géométrique, les sinus des angles que forment les tangentes menées par les extrémités respectives des rayons vecteurs avec l'axe sont aussi en progression géométrique.

L'équation polaire de la parabole en prenant pour pôle le foyer et pour axe polaire l'axe principal de la parabole est

$$\rho = \frac{p(1 + \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi},$$

(p désignant le demi-paramètre).

Maintenant je remarque, qu'un rayon vecteur quelconque ρ et la parallèle menée par son extrémité à l'axe polaire sont également inclinées sur la tangente; donc si α est l'angle que forme cette droite avec l'axe principal,

$$\alpha = \frac{1}{2} \varphi; \text{ donc } \sin \alpha = \sin \frac{1}{2} \varphi;$$

mais en vertu de transformations connues

$$\rho = \frac{p}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

d'où l'on déduit :

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \sin \alpha = \sqrt{\frac{p}{2\rho}};$$

or il est clair que si les valeurs données à ρ forment une progression géométrique dont la raison est k , les valeurs correspondantes de $\sin \alpha$ en formeront une autre dont la raison sera

$$\frac{1}{\sqrt{k}}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. Ce problème a été résolu aussi par M. Henri Dormoy.