

TERQUEM

Théorème de M. L. Raabe sur trois cercles tangents à une droite

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 28-31

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__28_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE M. L. RAABE ,
sur trois cercles tangents à une droite.

(Journal de Crelle , tome II.)

—

THÉORÈME 1. Trois cercles C , D , E , situés dans le même

plan, touchent une même droite ; X et Y sont deux autres droites, dans le même plan et formant un angle droit ; supposons que les trois cercles se meuvent parallèlement à la droite Y, jusqu'à ce qu'ils touchent la droite X, et alors soient C', D', E' les positions respectives qu'ont prises les centres C, D, E ; que les trois cercles C, D, E, se meuvent aussi parallèlement à la droite X, jusqu'à ce qu'ils touchent la droite Y, et soient C'', D'', E'' les positions des centres ; en désignant par D, D', D'' les aires des triangles CDE, C'D'E', C''D''E'', on a

$$D = D' + D''.$$

Démonstration. Prenons les droites X et Y pour axes des x et des y ; soient x', y' ; x'', y'' ; x''', y''' les coordonnées du centre C, D, E et R, R', R'' les rayons des cercles respectifs, les coordonnées de C', D', E' sont

$$x', R ; x'', R' ; x''', R'' ;$$

et les coordonnées des points C'', D'', E'' sont

$$R, y' ; R', y'' ; R'', y''' ;$$

soit $y = ax + b$ (1) l'équation de la droite qui touche les trois cercles C, D, E ; on a donc :

$$R = (y' - b) \cos \alpha - x' \sin \alpha ; \quad R' = (y'' - b) \cos \alpha - x'' \sin \alpha ;$$

$$R'' = (y''' - b) \cos \alpha - x''' \sin \alpha.$$

α est l'angle que fait la droite (1) avec l'axe des x .

On a :

$$2D = x'y'' - x''y' + x'y''' - x'''y'' + x''y' - y'''x'$$

$$2D' = x'R' - x''R + x''R'' - x'''R' + x'''R - R''x'$$

$$2D'' = y''R - y'R' + y'''R' - y''R'' + y'R'' - y'''R.$$

Remplaçant R, R', R'' par leurs valeurs, on trouve :

$$D' = D \cos \alpha$$

$$D'' = -D \sin \alpha$$

d'où

$$D' = D'' + D''' \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Tel est le théorème énoncé sans démonstration, et qu'on peut ainsi généraliser.

II. THÉORÈME. Soient quatre sphères C, D, E, F qui touchent le même plan; et trois plans XY, XZ, YZ rectangulaires, se coupant suivant les droites X, Y, Z; que les quatre sphères se meuvent parallèlement à l'axe des Z jusqu'à ce qu'elles touchent le plan XY et soient alors C', D', E', F' les positions des quatre centres; ensuite parallèlement à l'axe des Y, jusqu'à ce qu'elles touchent le plan XZ et soient alors C'', D'', E'', F'', les positions des quatre centres; et finalement que les sphères se meuvent parallèlement à l'axe des X jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes au plan YZ et soient C''', D''', E''', F''' les positions des quatre centres; représentons par V, V', V'', V''' les volumes des quatre pyramides

$$CDEF, C'D'E'F', C''D''E''F'', C'''D'''E'''F'''$$

on aura
$$V = V' + V'' + V'''.$$

Démonstration. Il est évident qu'on ne change pas les volumes des pyramides, en faisant mouvoir les plans XY, YZ, XZ, parallèlement à eux-mêmes; on peut donc supposer qu'ils passent tous les trois par le centre C d'une des sphères; et prenons-les pour plans des coordonnées. On peut de même admettre que les rayons des sphères soient diminués d'une longueur égale au plus petit de ces rayons; de sorte que l'une de ces sphères que nous supposons être C, se réduit à un point, l'origine. Les quatre pyramides sont

$$CDEF; CD'E'F'; CD''E''F''; CD'''E'''F''';$$

soient
$$x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''',$$

les coordonnées de D, E, F,

et
$$R, R', R'',$$

les rayons des sphères ; on aura pour coordonnées de

$$\begin{aligned} D' \text{ coord. } x', y', R \\ E' . . . x'', y'', R' \\ F' . . . x''', y''', R'' \end{aligned}$$

De plus :

$$\left. \begin{aligned} R &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma \\ R' &= x'' \cos \alpha + y'' \cos \beta + z'' \cos \gamma \\ R'' &= x''' \cos \alpha + y''' \cos \beta + z''' \cos \gamma \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma \text{ angles du plan avec} \\ \text{les axes des } x, y, z ; \end{array}$$

on a :

$$\begin{aligned} 6V &= x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' \\ 6V' &= x'y''R'' + y'x'''R' + x''y'''R - x'y'''R' - y'x''R'' - y''x'''R \\ (\text{Voy. t. I, p. 388}). \end{aligned}$$

Remplaçant R, R', R'' par leurs valeurs, on trouve :

$$V = V' \cos \alpha ;$$

et de même

$$V = V'' \cos \beta ; V = V''' \cos \gamma ;$$

donc

$$V^2 = V'^2 + V''^2 + V'''^2.$$

Tm.