

ARISTIDE MARRE

**Khélasat al Hisáb ou essence du calcul
de Behâ-eddin Mohammed ben al-
Hosaïn al-Aamouli**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 263-323

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__263_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

KHÉLASAT AL HISÁB,

OU

*Essence du calcul de Behâ-eddin Mohammed ben al-Hosain
al-Aamouli.*

Traduit d'après la version allemande de Nesselmann publiée à Berlin en 1843,

PAR M. ARISTIDE MARRE,

Soldat au 71^e régiment de ligne.

PRÉFACE.

On sait que les premiers algébristes européens durent les éléments de leur science aux Arabes, mais nous ne possédons, que je sache, aucun ouvrage français qui traite de la nature, de l'étendue et de l'origine de l'algèbre de nos instituteurs. Aucun extrait, aucune traduction de leurs ouvrages mathématiques n'ont été livrés à l'impression. C'est l'intention de remédier, bien imparfaitement sans doute, à cette pénurie complète de documents sur cette matière, ou plutôt de signaler cette pénurie même, qui m'a déterminé à faire paraître le présent opuscule.

Le *Khélasat al Hisáb* (Essence du Calcul) jouit d'une réputation considérable dans la Perse et dans l'Inde; on le regarde comme le traité par excellence, et c'est même à peu près le seul que l'on y enseigne. Bref et concis, il nous présente en outre un avantage important pour l'histoire de la science; car on y trouve indiquées les limites des connaissances algébriques au temps de l'auteur.

Cet ouvrage fut composé par BEHA-EDDIN MOHAMMED BEN AL HOSAIN, AL AAMOULI, qui, suivant le biographe NIZAM-EDDIN AHMED, naquit à *Baalbec*, dans le mois d'Hilhaj, 953 Hijri, et mourut à *Isfahan*, en Shawâl 1031 ; c'est-à-dire que l'année de sa naissance est l'an 1547 de notre ère, et celle de sa mort, l'an 1622. Nous pouvons ajouter que notre auteur est Syrien de naissance ; car *Baalbec* et *Aamoul* sont deux villes de Syrie ; la première, l'ancienne *Héliopolis*, dans le pachalic d'*Acre* ; la seconde, dans celui de *Damas*.

D'après l'orientaliste anglais STRACHEY, et son ami, le savant Indien MAULAWI ROUSHEN ALI, BEHA-EDDIN est aussi l'auteur d'un grand nombre d'écrits sur la religion, les lois, la grammaire, etc. ; d'un traité de l'astrolabe, et d'un ouvrage sur l'astronomie. Outre l'algèbre déjà citée, il en commença une autre plus étendue, le *Bâhr al Hisab* (l'Océan de Calculs), qui ne fut probablement jamais finie, car suivant MAULAWI ROUSHEN ALI, les commentateurs s'accordent à dire qu'elle n'existe pas.

Il n'y a aucune raison pour croire que les Arabes connurent jamais plus d'algèbre que n'en comporte l'ouvrage de BEHA-EDDIN ; car longtemps avant lui la science était parvenue à toute sa hauteur. Nous pourrions donc, par le *Khélasat al Hisab*, nous faire une idée de la nature et de l'étendue des connaissances algébriques des Arabes, et ceci me porte à espérer qu'une traduction fidèle et littérale ne sera pas tout à fait indigne de l'intérêt des savants indulgents qui ont bien voulu m'encourager et s'intéresser à moi, qui n'avais que zèle et gratitude.

Aristide MARRE.

Au nom de Dieu , clément et miséricordieux.

Nous te bénissons , toi , dont aucun nombre ne limite la somme des grâces , et dont les divisions répétées sans fin ne conduisent à aucune fin ; nous prions pour notre Seigneur MOHAMMED , l'Elu , et pour sa famille , principalement pour les quatre membres liés entre eux (1), les possesseurs du manteau de souveraineté (2). Ceci fait , alors (osera se nommer) celui qui est pauvre en comparaison de Dieu le Riche, BEHA-EDDIN MOHAMMED , fils de HOSAÏN , d'AMOUÏ ; puisse Dieu le Très-Haut ne lui laisser dire que ce qui sera vrai au jour où *compte sera rendu*.

Il dit : Quant à l'arithmétique , on sait combien sa substance est sublime , combien son rang est éminent , ses problèmes élégants , ses démonstrations solides ; on sait que beaucoup de sciences ont besoin d'elle , et que dans une multitude innombrable d'affaires on en fait usage. Ceci est un traité qui embrasse ses éléments les plus nécessaires , et réunit dans ses chapitres et sections ce qu'elle a de plus important. Ce traité renferme en outre d'élégants artifices choisis parmi ceux qui constituent l'essence des ouvrages des anciens auteurs , et , élaboré d'après ces bases distinguées , il servira de direction aux auteurs à venir. Je lui ai donné le nom d'*Essence du Calcul* , et l'ai partagé en une introduction et dix chapitres.

INTRODUCTION.

L'arithmétique est une science qui apprend à trouver des nombres inconnus en vertu de connaissances spéciales ; son objet est le nombre ; et attendu que celui-ci , comme on le dit , se manifeste dans la matière , par ce motif on compte l'arithmétique parmi les sciences abstraites. Toutefois les

opinions sont partagées là-dessus. Suivant les uns, le nombre est une collection, qui peut se réduire à l'unité, ainsi qu'à ce qui est composé avec cette dernière; d'après cette définition, l'unité est comprise dans le nombre. Suivant d'autres, le nombre est la demi-somme de ses deux limites; alors l'unité est exclue; on s'est efforcé cependant de l'y introduire, en prenant pour limite inférieure une fraction. La vérité est que l'unité n'est pas un nombre, bien que les nombres soient formés avec elle, de même que la substance simple, conformément à ceux qui admettent une telle substance, n'est nullement un corps, bien que les corps soient formés avec elle.

Le nombre est *absolu*, et alors il se nomme *nombre entier*, ou bien il se rapporte à une unité adoptée; il se nomme alors *fraction*, et cette unité, son *dénominateur*. Si le nombre absolu est exprimable avec les neuf chiffres, ou s'il a une racine carrée, on l'appelle *articulé*; sinon, on l'appelle *muet* (3). Si le nombre articulé est égal à la somme de ses diviseurs, il s'appelle *parfait*; est-il plus petit, il s'appelle *surabondant*; est-il plus grand, il s'appelle *défectueux*.

Le nombre a trois ordres primitifs : unités, dizaines et centaines; les nombres plus élevés qui dépassent ces limites, et il y en a une infinité, peuvent néanmoins se ramener à ces ordres primitifs. Les savants hindous ont, à cet effet, inventé les neuf caractères connus (4).

CHAPITRE PREMIER.

LE CALCUL DES NOMBRES ENTIERS.

Joindre un nombre à un autre, s'appelle *additionner*; l'en retrancher, *soustraire*; le répéter une fois, *doubler*; et plusieurs fois, suivant le nombre d'unités contenues dans un autre nombre, *multiplier*; le partager en deux parties égales, *démidier*; en plusieurs parties égales, suivant le nombre

d'unités d'un autre nombre , *diviser* ; produire le nombre par le moyen duquel un carré s'est formé , se nomme *extraire la racine carrée*. Nous distribuons ces opérations dans des sections distinctes.

PREMIÈRE SECTION.

Addition.

Écris les deux nombres l'un sous l'autre , et commence , à partir de la main droite , à ajouter chaque chiffre à son correspondant ; en résulte-t-il un nombre plus petit que dix , alors écris-le au-dessous ; pour un nombre plus grand , son excès ; pour dix , un zéro ; dans ces deux derniers cas , pour la dizaine retiens dans ta pensée une unité , afin de l'ajouter aux nombres de l'ordre suivant , ou bien écris-la à côté de l'ordre précédent , si ces nombres n'existent pas , ou dans cet ordre même. Tout chiffre qui n'a pas de correspondant , place-le tel qu'il est dans le rang de la somme. Voici le tableau :

$$\begin{array}{r} 20372 \\ 7656 \\ \hline 28028 \end{array}$$

Mais s'il y a plusieurs rangs de nombres , écris-les les uns sous les autres , ordre par ordre , et commence par la droite , en retenant dans ta pensée , pour chaque dizaine , une unité , ainsi que tu l'as appris. Voici le tableau :

$$\begin{array}{r} 72373 \\ 3318 \\ 514 \\ \hline 76205 \end{array}$$

Apprends que la *duplication* est proprement l'addition de deux nombres égaux , seulement tu n'as pas besoin d'écrire deux fois le même nombre , mais tu ajoutes chaque chiffre à

lui-même, comme tu ferais de son correspondant. Voici le tableau :

252073

504146

Tu peux, dans ces opérations, commencer aussi par la gauche ; seulement il te faut ensuite biffer, corriger et tirer des lignes, ce qui est une complication sans utilité. Le tableau est comme ci-dessous :

ADDITION DE DEUX NOMBRES.					ADDITION DE PLUSIEURS NOMBRES.					DUPLICATION				
5	2	5	3	7	5	3	7	3	2	2	5	0	6	7
2	7	9	4	2		4	1	7	9					
7	9	4	7	9			1	0	5	4	0	0	2	4
8	0				5	7	9	0	6	5		1	3	
						8	0	1						

Saches que l'on appelle *balance* (5) d'un nombre ce qui reste quand on en ôte neuf autant de fois que possible. Alors la preuve de l'addition et de la duplication consiste en ceci, que l'on additionne les balances des nombres additionnés, et que l'on double la balance du nombre doublé ; puis l'on prend la balance de la somme. Maintenant y a-t-il différence avec la balance du résultat, c'est que le calcul est faux.

DEUXIEME SECTION.

Démédiation.

Commence par la gauche, et au-dessous de chaque chiffre pose sa moitié, s'il est pair, et le nombre entier compris dans sa moitié s'il est impair, en même temps que pour la fraction tu retiens cinq dans ta pensée, pour l'ajouter à la moitié

du chiffre précédent, si c'est un nombre différent de l'unité ; mais est-ce *un* ou *zéro*, alors tu poses le cinq au-dessous. Après avoir parcouru le rang, conserves-tu une fraction ? alors pour l'indiquer écris un demi ; ainsi :

$$\begin{array}{r} 8730313 \\ 4365156 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Tu peux également commencer par la droite, en écrivant entre des lignes, comme ci-dessous :

1	3	6	5	4
	1	3	2	2
	6	8		7

La preuve consiste en ceci, que l'on double la *balance* de la moitié, et que de ce résultat on prend encore la *balance* ; est-il différent de la *balance* du nombre démié ? c'est que le calcul est faux.

TROISIÈME SECTION.

Soustraction.

Ordonne les deux nombres comme précédemment, commence par la droite, enlève chaque chiffre de celui placé au-dessus, et pose le reste sous la ligne horizontale. N'y a-t-il aucun reste ? mets un zéro. La soustraction n'est-elle pas possible ? alors prends une unité des dizaines voisines, fais alors la soustraction, et écris le reste. Mais si la place des dizaines est vide, alors tu prends aux centaines une unité qui, par rapport aux dizaines, signifie dix ; tu en laisses neuf à cette place, tu procèdes avec l'unité comme tu as appris, et tu pousses l'opération jusqu'au bout ; ainsi :

— 270 —

270753

29872

240881

Tu peux encore commencer par la gauche ; ainsi :

9	2	6	3
6	2	7	4
3	0	9	9
2	9	8	

La preuve consiste en ceci , que l'on retranche la *balance* du nombre à soustraire de la *balance* du nombre dont on soustrait , si cela est possible ; sinon , on ajoute neuf à ce dernier nombre , et l'on soustrait. Si ce reste diffère de la *balance* du reste, c'est que le calcul est faux.

QUATRIEME SECTION.

Multiplication.

Ceci est la recherche d'un nombre tel , que son rapport à l'un des multiplicateurs soit le même que celui qui existe entre l'unité et l'autre multiplicateur ; d'où il suit que l'unité n'a aucune influence dans la multiplication. Il se présente ici trois cas , ou c'est un nombre *simple* à multiplier par un nombre *simple* (6), ou un *simple* par un *composé*, ou un *composé* par un *composé*.

Dans le premier cas, on a : soit des *unités* par des *unités*, soit des *unités* par des *non-unités*, ou des *non-unités* par des *non-unités*. Ce qui concerne la première subdivision parle de soi-même. Dans les deux autres, au contraire, réduis les *non-unités* en *unités* de même nom Ensuite multiplie

ces unités entre elles et retiens le produit ; puis additionne les nombres qui représentent les ordres des deux facteurs, retranche *un* de la somme, et élève le produit à l'ordre marqué par ce reste. Si tu dois, par exemple, multiplier 30 par 40, alors tu places 12 à l'ordre des centaines, puisque le nombre des ordres est quatre, et que le troisième ordre est l'ordre des centaines ; as-tu 40 à multiplier par 500 ? alors tu places 20 à l'ordre des mille, car la somme des nombres des ordres est cinq (7).

Les deuxième et troisième cas se ramènent au premier, si l'on décompose le nombre composé en ses simples. Multiplie ensuite les nombres simples chacun à chacun et additionne les résultats.

Il y a des règles élégantes pour la multiplication qui conduisent à la solution de problèmes intéressants.

Règle pour deux nombres entre cinq et dix : Prends l'un des facteurs dix fois et du résultat retranche le produit de ce facteur par le complément à *dix* de l'autre facteur. Soit à multiplier 8 par 9 ; nous retranchons de 90 le produit de 9 par 2 ; le reste est 72.

Une autre règle (8) : Additionne les deux facteurs et considère comme dizaines l'excès de cette somme sur dix ; au résultat ajoute le produit des compléments à dix de chaque facteur. Soit à multiplier 8 par 7 ; nous ajoutons à 50 le produit de 2 par 3.

Règle pour la multiplication d'unités par un nombre compris entre *dix* et *vingt* : Additionne les deux facteurs, considère comme dizaines l'excès de la somme sur dix ; de ce résultat retranche le produit des différences avec *dix*, des deux nombres proposés. Soit à multiplier 8 par 14, nous retranchons de 120 le produit de 2 par 4.

Règle pour la multiplication de deux nombres compris l'un et l'autre entre *dix* et *vingt* : Ajoute les unités de l'un.

avec l'autre tout entier, considère la somme comme des dizaines ; à ceci ajoute le produit des unités par les unités. Par exemple, pour multiplier 12 par 13, nous ajoutons à 150 six.

Règle : S'il te faut multiplier un nombre quelconque par 5, ou 50, ou 500, prends sa moitié dix fois, ou cent fois, ou mille fois, et prends pour la fraction la moitié de ce que tu as pris pour le nombre entier. Par exemple, 16 multiplié par 5 donne 80, ou 17 par 50 donne 850.

Règle pour la multiplication d'un nombre entre *dix* et *vingt* par un nombre composé entre *vingt* et *cent* : Multiplie les unités du plus petit par les dizaines du plus grand, ajoute au produit le plus grand nombre, considère la somme comme des dizaines, et à ce résultat ajoute le produit des unités par les unités. Soit à multiplier 12 par 26 ; tu ajoutes 4 à 26, tu considères 30 comme autant de dizaines, tu finis l'opération, et il vient 312.

Règle : S'il te faut multiplier un nombre quelconque par 15, ou 150, ou 1500, augmente-le de sa moitié, et prends le résultat dix fois, ou cent fois, ou mille fois, et pour la fraction prends la moitié de ce que tu as pris pour le nombre entier. Ainsi, 24 multiplié par 15 donne 360, 25 multiplié par 150 donne 3750.

(9) Règle pour la multiplication de deux nombres entre *vingt* et *cent* ayant même chiffre de dizaines : Ajoute à l'un des facteurs les unités de l'autre, multiplie la somme par le chiffre des dizaines, considère le produit comme des dizaines, et augmente-le du produit des unités par les unités. Exemple : pour multiplier 23 par 25, tu multiplies 28 par 2, tu appelles le produit 56 dizaines, tu appliques complètement la règle, et alors il vient 575.

Règle pour deux nombres entre *vingt* et *cent* avec des dizaines en nombre différent : Multiplie les dizaines du plus

petit nombre par le plus grand tout entier, ajoute au résultat le produit des unités du plus petit nombre par les dizaines du plus grand, considère cette somme comme autant de dizaines, et joins-lui le produit des unités par les unités. Par exemple, pour multiplier 23 par 34, ajoute à 68 neuf, et à 770 douze.

Règle pour deux nombres inégaux, dont la demi-somme est un nombre entier ; additionne-les, multiplie leur demi-somme par elle-même et retranche du résultat le carré de leur demi-différence. Soit à multiplier 24 par 36 ; de 900 retranche le carré de la demi-différence des nombres, lequel est 36, alors il reste 864.

Règle : Quelquefois la multiplication devient plus facile, parce que l'on divise l'un des facteurs par le plus petit nombre de l'ordre supérieur, que l'on multiplie l'autre facteur par le quotient, et que l'on répète le résultat ainsi obtenu un nombre de fois indiqué par le diviseur adopté, afin de donner à la fraction sa valeur. Ainsi, soit à multiplier 25 par 12 ; divise le premier nombre par 100, le quotient est un quart ; maintenant prends un quart de 12 et multiplie-le par 100, ou bien 25 par 13, le quart de 13 est un quart, et le résultat 325.

Règle : Quelquefois la multiplication devient plus facile, si tu doubles un des facteurs une et plusieurs fois, si tu démidies l'autre de la même manière, et si tu multiplies l'un par l'autre les deux résultats. Soit 25 à multiplier par 16 ; si tu doubles maintenant le premier nombre deux fois et si tu démidies le second le même nombre de fois, cela se réduit alors à multiplier 4 par 100. Cela est tout à fait évident.

Éclaircissement. — Mais si les chiffres sont nombreux et que l'opération devienne difficile, tâche alors de t'aider de l'écriture. Dois-tu, par exemple, multiplier un nombre simple par un nombre composé, écris-les ; ensuite multiplie

par le chiffre du nombre simple le nombre du premier rang, et pose au-dessous les unités du produit ; quant aux dizaines, conserve-les comme autant d'unités dans ta pensée, pour les ajouter au produit du rang suivant, si toutefois il s'y trouve un nombre. S'y trouve-t-il, au contraire, un zéro ? alors écris ce nombre de dizaines au-dessous. Obtiens-tu un produit n'ayant pas d'unités ? mets un zéro, et pour chaque dizaine retiens une unité dans ta pensée ; procède avec elles comme tu as appris. Multiplies-tu par zéro ? écris un zéro. Enfin, si des zéros s'adjoignent après le nombre simple, écris-les à droite, à la suite du produit. Exemple : 5 à multiplier par le nombre 62043, le tableau de l'opération est comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r} 5 \\ 62043 \\ 310215 \end{array}$$

Et si c'eût été 500, alors tu aurais dû, à la droite du produit, adjoindre deux zéros, ainsi : 31021500.

Mais si tu as un nombre composé à multiplier par un nombre composé, il y a d'autres méthodes, telles que celles du *réseau*, de la *ceinture*, du *vis-à-vis* et autres ; mais la plus connue est celle du *réseau*. Trace une figure à quatre côtés et divise-la en carrés, et chaque carré en deux triangles, un supérieur et un inférieur, par le moyen de diagonales, comme tu le verras tout d'abord ; ensuite place l'un des facteurs au-dessus de la figure, chaque chiffre sur un carré, et l'autre à la gauche, les unités en bas, au-dessus d'elles les dizaines, ensuite les centaines, et ainsi de suite. Après cela, multiplie les chiffres séparément, chacun à chacun, et pose le produit dans le carré ; s'il s'y rencontre deux chiffres, les unités dans le triangle inférieur, les dizaines dans le supérieur, et laisse vides les carrés auprès desquels est placé un zéro. Maintenant

tout étant rempli, mets alors, sans y rien changer sous la figure, ce qui se trouve dans le premier triangle en bas à droite; s'il est vide, mets un zéro; c'est là le premier chiffre du produit; ensuite additionne ce qui se trouve compris entre deux transversales et pose le résultat à gauche du précédent; si l'espace est vide, mets un zéro, absolument comme dans l'addition. Par exemple si nous voulons multiplier 62374 par 207, voici le tableau de l'opération (10) :

		6	2	3	7	4	
2		1 2	4	6	1 4	8	
0		4 2	1 4	2 1	4 9	2 8	
7		4 2	1 4	2 1	4 9	2 8	
	1	2	9	1	1	4	1
							8

La preuve consiste en ceci, que l'on multiplie les *balances* des deux facteurs l'un par l'autre; si la *balance* de ce produit diffère de celle du résultat obtenu, c'est que le calcul est faux.

CINQUIÈME SECTION.

Division.

Ceci est la recherche d'un nombre qui ait avec l'unité le même rapport que le dividende avec le diviseur; ainsi, c'est l'inverse de la multiplication. L'affaire ici consiste donc en ce que l'on cherche un nombre dont le produit par le diviseur est égal au dividende, ou est moindre que celui-ci d'un nombre plus petit que n'est le diviseur.

Si le produit mentionné est égal au dividende, alors le nombre trouvé se nomme le quotient; et s'il est plus petit,

de la manière énoncée, donne à la différence le diviseur pour dénominateur, alors cette fraction, jointe au nombre entier, est le quotient.

Si les nombres sont grands, trace une table avec autant de bandes que le dividende a de places ; mets celles-ci entre les lignes, le diviseur en bas, de telle sorte que les chiffres de la plus haute espèce soient placés l'un sous l'autre, si le diviseur n'est pas plus grand que les chiffres du dividende qui lui correspondent ; s'il en est ainsi, mets le diviseur au-dessous ; dans le cas contraire, mets-le de façon qu'il soit placé sous l'avant-dernier chiffre du dividende (11). Ensuite cherche le plus grand nombre parmi les unités dont le produit par chacun des chiffres du diviseur puisse se soustraire des chiffres du dividende qui se trouvent précisément au-dessus d'eux, ou peut-être à gauche, et pose le reste sous une ligne de séparation. As-tu trouvé un pareil nombre ?

1 8 4 1 0

alors mets-le au-dessus de la table, à la place qui correspond au premier chiffre du diviseur, et procède avec lui comme tu as appris. Ensuite avance le diviseur d'un rang à droite, ou ce qui reste du dividende d'un rang à gauche, après que tu as tiré une ligne horizontale. Ensuite cherche de nouveau le plus grand nombre, comme auparavant, et pose-le à droite du premier et procède avec lui comme tu as appris. Ne peut-il se trouver aucun nombre de cette espèce, alors pose un zéro et avance à droite, comme précédemment, successive-

9	7	5	7	4	1
5	3				
4	4				
4	0				
	4				
	2	4			
	2	1			
	2	0			
		1			
		1	2		
			5	4	
			5	3	
				1	
				5	3
			5	3	
		5	3		
5	3				

ment d'un rang jusqu'à ce qu'enfin l'ordre le plus faible du

diviseur soit placé sous l'ordre le plus faible du dividende; ensuite c'est ce qui est placé au-dessus de la table qui est le quotient. S'il reste quelque chose du dividende, alors c'est une fraction dont le dénominateur est le diviseur. Par exemple le nombre 975741 doit-il être divisé par le nombre 53, alors le quotient est 18410, comme nombre entier, et 11 de 53 parties, si 53 est pris comme unité. Le tableau est ci-contre.

La preuve consiste en ceci, que l'on multiplie la balance du quotient par la balance du diviseur, et qu'à cela on ajoute la balance du reste, s'il en existe un; la balance de cette somme est-elle différente de la balance du dividende? alors le calcul est défectueux.

SIXIÈME SECTION.

Extraction de la racine carrée.

La quantité que l'on multiplie par elle-même s'appelle *Racine* en arithmétique, *Côté* en géométrie, et *SHAÏ* (Chose) en algèbre. Le résultat s'appelle carré. Si le nombre est petit, la recherche de la racine carrée n'exige aucun effort d'esprit, dès qu'il est rationnel; est-il irrationnel? retranches-en le carré qui en approche le plus, et donne au reste, pour dénominateur, le double de la racine du carré soustrait augmenté de l'unité; c'est la racine du carré soustrait jointe à cette fraction qui est la racine carrée par approximation du nombre donné (12).

Mais s'il est grand, alors place-le au dedans d'une table, comme le dividende, et marque les rangs de deux en deux; ensuite cherche le plus grand nombre parmi les unités, de sorte que, si tu soustrais son carré du chiffre situé au-dessous de la première marque et de celui qui le précède (situé à sa gauche), il y ait un reste nul ou moindre que le carré soustrait (13). As-tu trouvé un pareil nombre? alors place-

le en haut et en bas à une distance déterminée; multiplie ensuite le supérieur par l'inférieur, et mets le produit sous le nombre dont la racine carré est demandée, de telle sorte que ses unités soient placées sous le multiplicateur; soustrais le produit de ce qui se trouve au-dessus et à gauche, et écris le reste au-dessous, après que tu as tiré une ligne de séparation. Après cela, additionne le nombre écrit en haut avec celui écrit en bas, et écris la somme en bas en avançant d'un rang à droite. Ensuite cher-

	.3	.5	.8
1	2	8	1
	9		7
	3		2
	3	0	
		8	
		2	5
		5	6
		5	6
			6
			4
			8
		7	1
		7	7
		0	8
	6	5	
	3		

che de nouveau le plus grand nombre, tel que, si tu l'as écrit en haut, à la seconde marque et aussi en bas, son produit, par tout le nombre inférieur, puisse se soustraire de celui qui se trouve au-dessus et à gauche; ce nombre est-il trouvé? alors procède avec lui comme tu as appris, additionne le nombre d'en haut avec celui d'en bas, et avance ce qui se trouve en bas d'un rang à droite. Mais un semblable nombre ne peut-il se trouver? alors pose en haut, à la marque et en bas un zéro, et avance d'un rang. Procède de même, jusqu'à ce que tu sois à la fin, alors ce qui est écrit en haut est la racine carrée, et, s'il n'est demeuré aucun reste sous les lignes de séparation, alors le nombre est un carré rationnel; y a-t-il un reste, alors il est carré irrationnel, et ce reste est une fraction dont on trouve le dénominateur si on additionne, avec ce qui se trouve en bas, ce qui est en haut, à côté de la dernière marque joint à l'unité. Exemple : nous voulons extraire la racine carrée de ce nombre 128172, nous opérons comme nous avons dit, et ensuite le tableau est comme ci-dessus. Sous les lignes de séparation, il est resté 8, et c'est une fraction dont le dénominateur est formé, si on

additionne avec ce qui se trouve en bas, ce qui se trouve en haut à la dernière marque, joint à l'unité, et c'est 717.

La preuve consiste en ceci, que l'on carre la balance du résultat, et qu'on lui ajoute la balance du reste s'il y en a un. Maintenant la balance de cette somme diffère-t-elle de la balance du nombre donné, alors le calcul est faux.

SECOND CHAPITRE.

CALCUL DES FRACTIONS,

Contenant trois préliminaires et six sections.

PREMIER PRÉLIMINAIRE.

Si deux certains nombres autres que l'unité sont égaux, on les nomme : *identiques* ; un autre cas est celui où le plus petit mesure le plus grand, on les nomme alors nombres *aliquotes* ; un autre cas encore est celui où un troisième nombre les mesure tous les deux, alors on les nomme *congruents*, et la fraction dont le dénominateur est ce troisième nombre, s'appelle leur *congruence* ; si cela n'a pas lieu, on les nomme alors *hétérogènes*. L'identité est une chose claire par elle-même ; on reconnaît les autres états de corrélation de deux nombres, si l'on divise le plus grand par le plus petit ; il n'y a pas de reste, alors ils sont *aliquotes* ; s'il y a un reste, nous divisons le diviseur par le reste, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus aucun reste ; alors les nombres sont congruents, et le dernier diviseur est leur plus grand commun diviseur ; mais si l'on parvient à l'unité, comme reste, alors ils sont hétérogènes. De plus la fraction est ou *articulée* (14), et ce sont les neuf (premières) fractions connues, ou *muettes*, qu'il n'est possible d'exprimer qu'à l'aide d'une circonlocution. De plus, chacune d'elles est ou *simple*, comme un tiers, un onzième ; ou *multiple* comme

deux tiers, deux onzièmes, ou *dépendante*, comme un demi d'un sixième, un onzième d'un treizième, ou *composée*, comme un tiers et un demi, un onzième et un treizième.

Si tu veux écrire une fraction, écris-la ainsi : quand elle est jointe à un nombre entier, celui-ci tout en haut, et la fraction au-dessous, le numérateur sur le dénominateur ; dans le cas contraire, mets un zéro à sa place. On unit les fractions composées par le mot *et* et les fractions dépen-

dantes, avec le mot *de*. Ainsi l'on écrit : un et deux tiers $1\frac{2}{3}$;

la moitié de cinq sixièmes $\frac{5}{2}$; deux cinquièmes et trois quarts : $\frac{2}{5}$
 $\frac{3}{6}$

$\frac{0}{2}$ et $\frac{0}{3}$; un onzième d'un treizième $\frac{0}{11}$ de $\frac{0}{13}$.
 $\frac{5}{4}$ $\frac{11}{13}$

DEUXIÈME PRÉLIMINAIRE.

Le dénominateur d'une fraction est le plus petit nombre qui en fasse un nombre entier. Le dénominateur d'une fraction simple, frappe les yeux, et n'est pas différent du dénominateur d'une fraction multiple. Le dénominateur d'une fraction dépendante est le produit des dénominateurs de ses fractions simples. Quant à la fraction composée, compare les dénominateurs de ses deux fractions ; sont-ils des nombres hétérogènes multiplie-les l'un par l'autre ; sont-ils congruents, alors multiplie la congruence de chacun d'eux par l'autre ; sont-ils aliquotes, alors contente-toi du plus grand ; ensuite compare le résultat avec le dénominateur de la troisième fraction, et procède comme tu as appris, et ainsi de suite ; le résultat est le dénominateur cherché. Veux-tu par exemple le dénominateur commun des neuf premières fractions, multiplie 2 par 3, puisqu'ils sont

hétérogènes, le résultat par la moitié de 4, puisqu'ici il y a congruence; le résultat par 5, à cause de l'hétérogénéité; mais 6 se trouve dans le résultat, contente-toi donc de celui-ci, et multiplie-le par 7, à cause de l'hétérogénéité, et le résultat par un quart de 8, puis celui-là par un tiers de 9, à cause de la congruence; 10 se trouve dans le résultat qui est 2520; sois-en donc satisfait; c'est en effet le dénominateur demandé.

Addition. Tu peux aussi comparer tout ensemble les dénominateurs des fractions simples. Ceux d'entre eux qui sont compris dans un autre, passe par dessus, et contente-toi du plus grand; pour ceux qui sont *congruents* avec un autre, substitue leur *congruence*, et procède de même avec cette *congruence*, jusqu'à ce que les dénominateurs soient réduits à l'hétérogénéité; ensuite multiplie-les les uns par les autres; le produit est la quantité demandée. Dans l'exemple, efface 2, 3, 4 et 5 puisqu'ils se trouvent dans les dénominateurs suivants; 6 est *congruent* avec 8, suivant un demi, en conséquence substitue-lui sa moitié; mais celle-ci se trouve dans 9, efface-la donc; 8 est *congruent* avec 10, suivant un demi; en conséquence multiplie 5 par 8, le produit par 7, et celui-ci par 9, alors tu as le nombre demandé.

Facétie (15). On obtient le dénominateur des neuf fractions, si on multiplie les jours du mois par le nombre des mois, et ce produit par les jours de la semaine. Ou bien si on forme un produit de ceux de ces dénominateurs qui contiennent la lettre : AÏN. Le maître des fidèles, ALI (salut à lui!), interrogé là-dessus, répondit : multiplie les jours de la semaine par les jours de l'année.

TROISIÈME PRÉLIMINAIRE.

Transformation des fractions mélangées en fractions impures et réciproquement.

La transformation d'une fraction mélangée en une impure,

consiste en ceci , que l'on fait d'un nombre entier une fraction ayant le dénominateur d'une fraction donnée, et l'opération est celle-ci : si la réunion d'un nombre entier et d'une fraction est donnée, on multiplie le nombre entier par le dénominateur de la fraction, et à cela on ajoute le numérateur. Ainsi la transformation de 2 un quart donne 9 quarts ; la conversion de 6 trois cinquièmes égale 33 cinquièmes et la conversion de 4 un vingt et unième égale 85 vingt et unièmes.

La transformation d'une fraction impure en une mélangée, consiste en ceci que l'on fait d'une fraction un nombre entier. Si nous avons par exemple : une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, alors nous le divisons par le dénominateur ; en suite le quotient est un nombre entier, et le reste une fraction avec le dénominateur. Ainsi la résolution de quinze quarts , est trois et trois quarts.

PREMIÈRE SECTION.

Addition et duplication des fractions.

On prend , après le dénominateur rendu commun , la somme ou le double , et c'est par lui que l'on divise le numérateur, si ce dernier est plus grand ; s'il est plus petit , on écrit le dénominateur au-dessous ; s'il lui est égal , le résultat est une unité. Ainsi un demi, un tiers et un quart égaient un et un douzième ; un sixième et un tiers c'est un demi ; un demi, un tiers et un sixième c'est un ; et le double de trois cinquièmes est un et un cinquième.

DEUXIÈME SECTION.

Demidiation et soustraction des fractions.

Demidiation. Si le numérateur est un nombre pair, alors demidie-le ; si c'est un nombre impair, alors double le dénominateur et écris-le sous le numérateur. Cela est évident.

Soustraction. Soustrais-un numérateur de l'autre, après qu'ils sont réduits au même dénominateur, et écris sous ce reste le dénominateur commun.

Si tu soustrais ainsi un quart d'un tiers, il reste un douzième.

TROISIÈME SECTION.

Multiplication des fractions.

Si d'un côté seulement il y a une fraction, avec ou sans nombre entier, multiplie la fraction impure ou le numérateur simple par le nombre entier ; ensuite divise le produit par le dénominateur, ou écris celui-ci au-dessous ; si l'on multiplie deux et trois cinquièmes par quatre, alors nous divisons le produit de la fraction impure et du nombre entier, c'est-à-dire 52 par 5, il vient alors 10 et deux cinquièmes.

Si nous avons à multiplier 3 quarts par 7, alors nous divisons 21 par 4 ; il vient alors 5 un quart, et c'est là la quantité demandée.

Si des deux côtés se trouve une fraction, et avec chacune, avec une seule, ou avec aucune, un nombre entier, alors multiplie les numérateurs des fractions impures l'un par l'autre, ou bien la fraction impure par le numérateur de l'autre, ou bien numérateur par numérateur, et que ce soit là le premier résultat. Puis multiplie dénominateur par dénominateur, et que ce soit là le second résultat. Enfin divise le premier par celui-ci, ou écris ce dernier comme dénominateur sous le premier ; le résultat est alors la quantité demandée. Ainsi le produit de 2 et un demi par 3 et un tiers est 8 un tiers ; le produit de 2 un quart par 5 sixièmes est 1 et 7 huitièmes, et de 3 quarts par 5 septièmes, c'est un demi plus un vingt-huitième.

QUATRIÈME SECTION.

Division des fractions.

Ici se présentent huit cas, comme la réflexion l'atteste. Le procédé consiste en ce que tu multiplies le dividende et le diviseur par le dénominateur commun, si des deux côtés sont des fractions, ou par le dénominateur existant, si seulement un côté renferme une fraction; ensuite tu divises le produit du dividende par le produit du diviseur, ou bien tu écris celui-ci comme dénominateur au-dessous. C'est ainsi que si l'on divise 5 un quart par 3, le quotient est 1 trois quarts; et inversement si l'on divise 3 par 5 un quart, 4 septièmes; et deux sixièmes divisé par un sixième donne 2, comme le montre la règle de la division ci-dessus enseignée. Au reste, c'est à toi de rechercher les autres exemples.

CINQUIÈME SECTION.

Extraction de la racine carrée des fractions.

Si la fraction est jointe à un nombre entier, arrange-la de manière que le tout devienne une fraction. Ensuite, si le numérateur et le dénominateur sont *articulés*, alors divise la racine du numérateur par la racine du dénominateur, ou bien donne celle-ci pour dénominateur à celle-là. Ainsi la racine carrée de 6 un quart égale 2 et un demi, et la racine carrée de 4 neuvièmes égale deux tiers. Mais s'ils ne sont pas *articulés*, alors multiplie le numérateur par le dénominateur, extrais approximativement la racine carrée du produit et divise-la par le dénominateur. Veux-tu, par exemple, extraire la racine carrée de 3 et demi, alors multiplie 7 par 2 et extrais approximativement la racine carrée du produit; elle est 3 et cinq septièmes; ensuite divise-la par 2; il en résulte 1 et six septièmes.

SIXIÈME SECTION.

Réduction d'une fraction à un dénominateur donné.

Multiplie le numérateur de la fraction par le dénominateur auquel on doit la réduire, et divise le produit par le dénominateur primitif, le quotient est le numérateur pour le dénominateur donné. On demande combien de huitièmes il y a dans cinq septièmes : divise 40 par 7 ; il en résulte $5\frac{5}{7}$ huitièmes ; et si l'on demande combien de sixièmes, alors la réponse est $4\frac{2}{7}$ sixièmes.

TROISIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR LE MOYEN DE LA PROPORTION.

Ici le premier terme se comporte avec le second comme le troisième avec le quatrième, et le produit des termes externes doit être égal au produit des internes, ainsi qu'on le démontre. L'un des termes externes étant inconnu, divise le produit des termes internes par l'externe connu ; si c'est l'un des internes qui est inconnu, divise le produit des termes externes par l'interne connu ; le quotient est la quantité demandée. Les problèmes qui ont ici leur place, sont relatifs soit à la somme et à la différence, soit à des affaires commerciales et choses analogues.

Premièrement. On peut demander : quel est le nombre qui, si on lui ajoute un quart de sa valeur, devient trois ?

Solution. Prends le dénominateur de la fraction, et donne-lui le nom de *supposition*. Opère à l'aide de ce nombre et suivant la question ; ce à quoi tu parviens, nomme le *moyen* ; tu as ainsi trois quantités connues, savoir : la *supposition*, le *moyen* et la *connue* ; par la *connue* il faut entendre ce qui a été donné par celui qui a posé le problème, quand il a dit : cela devient tel ou tel nombre. Maintenant, la *supposition* en sa

qualité de premier terme, se comporte avec le *moyen* en sa qualité de second, comme l'inconnue, en sa qualité de troisième, se comporte avec la *connue*, qui est le quatrième.

Multiplie la supposition par la connue, et divise le produit par le moyen ; de là résulte l'inconnue qui dans cet exemple est 2 et deux cinquièmes.

Secondement. Si l'on posait cette question : 5 livres pour 3 dirhems (16), 2 livres pour combien ? Ici 5 livres représentent l'objet évalué, 3 la valeur, les 2 livres l'achat et la quantité demandée, c'est le prix. L'objet évalué est à la valeur, comme l'achat est au prix. Ainsi l'inconnue est le quatrième terme ; c'est pourquoi divise le produit des termes internes, c'est-à-dire 6, par le premier terme 5. Mais si l'on demandait combien de livres pour 2 dirhems, alors l'inconnue serait l'achat, et en même temps le troisième terme ; aussi tu devrais diviser le produit des termes externes, c'est-à-dire 10, par le second, 3. De là on déduit cette règle : multiplie la dernière donnée de la question par son hétérogène, et divise le produit par son homogène.

Ce chapitre est d'une grande utilité. Retiens-le ! *Il est celui dont on implorera le secours !*

QUATRIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR LE MOYEN DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

Prends pour l'inconnue tel nombre que tu voudras, nomme-le : *première supposition*, et opère conformément à l'énoncé ; s'il le vérifie, c'est lui l'inconnue. Mais s'il en dévie de l'un ou de l'autre côté (en plus ou en moins), alors nomme la différence, *première déviation*. Ensuite prends un autre nombre, nomme-le : *seconde supposition* ; s'il dévie, il donne alors la *seconde déviation*. Après cela, multiplie la première supposition par la seconde déviation, et nomme le produit

le *premier résultat* : puis la seconde supposition par la première déviation, c'est là le *second résultat*. Si les deux déviations sont en même temps positives, ou négatives, alors divise la différence des deux résultats par la différence des deux déviations ; dans le cas contraire, divise la somme des deux résultats par la somme des déviations ; le quotient est le nombre demandé.

On voudrait savoir quel est le nombre qui, augmenté des deux tiers de sa valeur, et de 1, donnera 10 ? Voici : Si tu prends 9, la première déviation est 6 ; prends-tu 6, la seconde déviation est 1 ; d'où le premier résultat est 9, le second 36, et le quotient que tu obtiens si tu divises la différence des résultats par la différence des déviations est 5 deux cinquièmes. Tel est le nombre demandé.

On voudrait aussi savoir : quel est le nombre tel que si on lui ajoute un quart de sa valeur, si à cette somme on ajoute ses trois cinquièmes, et si de cette dernière somme on retranche 5, on retombera sur le nombre demandé lui-même. Si tu prends 4, la déviation est 1 par défaut ; si tu prends 8, c'est 3 par excès. D'où il suit que le quotient 5, provenant de la division de la somme des résultats par la somme des déviations est la quantité cherchée.

CINQUIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR LE MOYEN DE L'OPÉRATION DE L'INVERSION.

Ce procédé consiste en ceci, que l'on fait le contraire de ce que l'interrogateur a déterminé ; a-t-il doublé, demidie ; a-t-il additionné, soustrais ; a-t-il multiplié, divise, a-t-il extrait la racine carrée, élève au carré ; a-t-il employé l'inversion, renverse de nouveau la question, et commence par la dernière partie du problème : ensuite tu obtiens la solution.

Exemple. On demande : quel est le nombre tel que si on le multiplie par lui-même, si au produit on ajoute 2, si au double de cette somme, on ajoute 3, et si le résultat divise par 5 est ensuite multiplié par 10, on obtient en dernier lieu 50 ?

Divise ce nombre par 10, multiplie le quotient 5 par lui-même, retranches-en 3 ; de la moitié de 22 soustrais 2, et prends la racine carrée de 9 ; alors c'est cette racine de 9, la réponse à la question.

On demande : quel est le nombre tel qu'augmenté de sa moitié et de 4, il fournisse un résultat qui, modifié de la même façon, donne 20 ? Retranche 4, puis de 16 son tiers, puisque au nombre cherché on a ajouté sa moitié, alors il reste 10 deux tiers ; retranches-en 4 ; et du reste soustrais son tiers ; il vient 4 et quatre neuvièmes, et c'est là la solution (17). *Dieu connaît mieux la vérité.*

SIXIÈME CHAPITRE.

GÉOMETRIE.

Composé d'une introduction et de trois sections.

INTRODUCTION.

La *géométrie* recherche combien de fois dans la grandeur continue de l'espace, l'unité linéaire ou ses divisions ou ces deux mesures à la fois sont comprises, si c'est une ligne ; ou combien de fois l'est l'unité carrée, si c'est une surface ; ou l'unité cubique, si c'est un corps.

La *ligne* est la grandeur d'une dimension ; on la divise en *ligne droite* qui est la plus courte des lignes qui joignent deux points, et en même temps celle que l'on choisit, quand on a le libre choix ; ses dix noms sont connus (17bis) ; avec une de ses pareilles, elle ne renferme aucun espace ; et en *ligne courbe* que l'on subdivise encore en *ligne circulaire* qui est

connue, et en *courbe non circulaire*, dont nous n'aurons pas à nous occuper ici.

La *surface* est la grandeur qui n'a pas plus de deux dimensions ; elle est plane , si les lignes droites qui sont tirées sur elle , coïncident avec elle en chaque point. Est-elle limitée par une seule ligne circulaire , elle s'appelle *un cercle* ; la ligne qui le demidie , le *diamètre* ; et celle qui ne le demidie pas , *corde* par rapport aux deux arcs , et *base* par rapport aux deux segments ; est-elle limitée par un arc et deux demi-diamètres qui se coupent au centre , alors c'est une *échan-crure* , et à vrai dire il y en a une grande et une petite à la fois. Si elle est limitée par deux arcs dont la convexité est tournée d'un même côté, et tous deux plus petits que le demi-cercle , c'est une *lune* , s'ils sont plus grands , alors c'est un *fer à cheval* ; si les deux arcs sont convexes de côtés différents , l'un égal au demi-cercle et l'autre plus petit , alors c'est un *myrobolan* ; s'ils sont plus grands que le demi-cercle , c'est un *navet*. Si le plan est limité par trois lignes droites , il en résulte un triangle qui est équilatéral ou isocèle ou scalène , rectangle , obtusangle ou acutangle. Si ce sont quatre lignes égales , c'est un *carré* , pourvu qu'elles soient mutuellement perpendiculaires , sinon un *losange* ; si elles sont inégales , avec égalité de celles situées vis-à-vis l'une de l'autre , c'est un *rectangle* quand elles sont perpendiculaires , autrement un *parallélogramme* ; si aucune de ces conditions n'a lieu , alors naissent les *trapèzes* ; certains d'entre eux reçoivent quelquefois des noms particuliers , tels que le *trapèze à une pointe* , à *deux pointes* , et le *concombre* (18). Si le plan est borné par plus de quatre côtés , il s'appelle *polygone* ; et si les côtés sont égaux , on dit : un *quintile* , un *sextile* , et ainsi de suite ; sinon l'on dit une figure *quinquilatère* , *sextilatère* , et ainsi de suite jusqu'à dix , dans les deux espèces ; après cela on les appelle figure à onze bases , à douze bases ,

et ainsi de suite dans les deux espèces; quelquefois aussi quelques-unes reçoivent des noms particuliers comme *SCALARIFORME*, *TYMPANIFORME*, *SPICULIFORME* (19).

Le *corps* est la grandeur de trois dimensions ; s'il est terminé par une surface telle que les lignes droites partant de son intérieur sont égales entre elles, alors c'est une *sphère*; les cercles qui la demidient s'appellent *grands cercles*; les autres, *petits cercles*. S'il est renfermé entre six carrés égaux, alors c'est un *cube*. Si deux cercles, en même temps égaux et parallèles, sont unis par une surface telle qu'une ligne droite joignant les périphéries et tournant tout autour, coïncide avec elle en chaque point pendant tout son parcours, alors c'est un *cylindre* (*colonne*); les deux cercles sont ses *bases*, et la ligne qui joint leurs centres, son *axe*; celui-ci se tient-il perpendiculaire à la *base*, alors le cylindre est *droit*; autrement, *oblique*. S'il est renfermé par un cercle et par une surface convexe piniforme, qui de la périphérie va se réduire en un point, et qui est telle qu'une ligne droite de jonction parcourant la périphérie, coïncide avec elle dans tout son parcours, alors c'est un *cône*, lequel est droit ou oblique; le cercle est sa *base*; la ligne qui joint son centre avec le point, son *axe*. S'il est coupé par un plan parallèle à la base, alors la portion soujacente est un *cône raccourci*. Si la base du cône et du cylindre est une figure angulaire, ils deviennent tous deux, de cette façon, des corps angulaires. Voici la plupart des termes techniques employés dans cette doctrine.

PREMIÈRE SECTION.

Mesure des figures rectilignes.

En ce qui concerne le triangle, rectangle à la vérité, multiplie un des côtés de l'angle droit par la moitié de l'autre.

Dans l'obtusangle, multiplie la perpendiculaire qui tombe de l'angle obtus sur le côté opposé, par la moitié de ce côté opposé, ou inversement. Dans l'acutangle, fais la même multiplication avec la perpendiculaire partant d'un angle quelconque et le côté opposé. On apprend à laquelle de ces trois classes un triangle donné appartient, si on élève au carré son plus grand côté; ce carré est-il égal aux deux carrés des autres côtés, alors il est rectangle; est-il plus grand, il est obtusangle; est-il plus petit, il est acutangle. On trouve la hauteur ainsi qu'il suit : l'on prend le plus grand côté comme base, l'on multiplie la somme des deux plus petits par leur différence, l'on divise le produit par la base, et l'on retranche le quotient de cette même base; ensuite la moitié du reste est la distance du pied de la hauteur à l'extrémité du plus petit côté. Tire de là une ligne au sommet, voilà quelle est la hauteur; multiplie-la par la moitié de la base, il en résulte l'étendue de la surface (20).

Parmi les méthodes, pour trouver l'aire du triangle équilatéral, fais attention à celle-ci : tu multiplies par 3 le carré de la quatrième partie du carré d'un côté indistinctement; ensuite c'est la racine carrée du produit la réponse (21).

Dans le carré, multiplie un côté par lui-même; dans le rectangle, par son adjacent; dans le losange, la moitié d'une diagonale par l'autre tout entière. Partage les autres quadrilatères en deux triangles, alors la somme des deux aires est égale à l'aire de la somme. Pour quelques-uns d'entre eux, il y a des méthodes particulières, mais qui ne sont pas propres à entrer dans ce traité.

Pour ce qui concerne les polygones, multiplie, dans l'hexagone régulier, l'octogone et tous les autres d'un nombre pair de côtés, le demi-diamètre par la demi-somme des côtés, le produit est la réponse : or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés. Tous les autres

seront partagés en triangles , puis mesurés. Ceci est vrai pour tous en commun ; mais pour quelques-uns on a des méthodes comme pour les quadrilatères.

DEUXIÈME SECTION.

Mesure des autres surfaces.

Quant au *cercle*, pose un fil sur sa périphérie et multiplie le demi-diamètre par la moitié de ce fil , ou bien retranche du carré du diamètre son septième et son demi-septième , ou multiplie le carré du diamètre par 11 et divise le produit par 14. Si tu multiplies le diamètre par 3 et un septième, tu obtiens la périphérie, et si tu divises la périphérie par ce même nombre, tu obtiens le diamètre. A l'égard des deux *secteurs*, multiplie le demi-diamètre par le demi-arc. Quant aux deux *segments*, marque bien le centre , et achève les deux secteurs , alors il se forme là un triangle ; retranche - le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment , ou ajoute-le au plus grand, il en résulte le plus grand segment. Quant à la *lune* et au *fer-à-cheval* , joins leurs points extrêmes par une ligne droite et retranche le plus petit segment du plus grand ; partage en deux segments le *myrobolan* et le *navet*.

Pour la surface de la *sphère*, multiplie le diamètre par la périphérie du plus grand cercle , ou le carré du diamètre par quatre , en retranchant trois quatorzièmes du produit. L'aire de la surface courbe du *segment sphérique* est égale à l'aire d'un cercle dont le diamètre est égal à la ligne qui joint le pôle du segment avec la périphérie de la base.

Pour la surface du *cylindre droit* , multiplie la ligne parallèle à l'axe qui joint les deux bases par la périphérie de la base.

Pour la surface du *cône droit*, multiplie la ligne qui joint le sommet à la périphérie de la base par cette demi-périphérie.

Pour les surfaces qui ne sont pas mentionnées ici, on tâche de s'aider de celles qui sont mentionnées.

TROISIÈME SECTION.

Mesure des corps.

Dans la sphère, multiplie son demi-diamètre par un tiers de sa superficie, ou bien retranche du cube du diamètre ses trois quatorzièmes; du reste, de même, et du dernier reste, de même (22).

Pour le secteur, multiplie le demi-diamètre de la sphère par un tiers de la surface du secteur.

Pour les cylindres et prismes de chaque espèce, multiplie la hauteur par la surface plane de la base.

Pour les cônes entiers et les pyramides de chaque espèce, multiplie la hauteur par un tiers de l'aire de la base.

Pour le cône tronqué, multiplie le diamètre de la plus grande base par la hauteur et divise le produit par la différence des diamètres des deux bases, il en résulte la hauteur du cône, comme s'il était entier. La différence entre la hauteur du cône entier et celle du cône tronqué est la hauteur du petit cône, qui est le supplément de celui-ci; multiplies-en le tiers par la plus petite base, tu obtiens ainsi le volume du petit cône; puis retranche-le du cône entier.

Pour la pyramide tronquée, multiplie un côté de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence entre un côté de cette base et un de la petite, tu as alors la hauteur de la pyramide entière; mène ensuite l'opération à fin.

Les démonstrations de toutes ces opérations sont expliquées dans mon livre plus étendu, intitulé : L'Océan du Calcul; puisse Dieu le très-haut me donner assistance pour son entier accomplissement!

SEPTIÈME CHAPITRE.

SUR L'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE AU NIVELLEMENT USITÉ POUR
L'EXÉCUTION DES AQUEDUCS , A LA RECHERCHE DES HAUTEURS
D'OBJETS ELEVES , DE LA LARGEUR DES RIVIÈRES ET DE LA PRO-
FONDEUR DES PUIITS.

Composé de trois sections.

PREMIÈRE SECTION.

Nivellement du sol , en usage pour l'exécution d'aqueducs.

Fais une tablette d'airain , ou de semblable matière , en forme de triangle isocèle ; mets entre les extrémités de sa base deux anneaux et au pied de la hauteur un cordon portant un poids ; ensuite passe-la (par ses anneaux au milieu d'un cordeau , et place les deux bouts de celui-ci sur deux piquets de bois , droits , égaux , et mis à plomb au moyen de fils à plomb avec l'aide de deux hommes , qui se tiennent distants l'un de l'autre de la longueur du cordeau ; il est d'usage , à la vérité , que le cordeau soit long de quinze aunes et chacun des deux piquets de bois de cinq emfans. Ensuite observe le cordon à poids ; rencontre-t-il la pointe de la tablette ? alors les deux lieux sont de niveau entre eux ; sinon , descends le cordeau de la pointe de l'un des piquets jusqu'à ce que le cordon à poids atteigne l'angle ; alors la mesure de la descente est l'excès. Laisse un des deux hommes circuler du côté où tu veux niveler et garde dans ta mémoire , une à une , chaque déviation positive et négative , et retranche toujours la plus petite de la plus grande ; le reste est la différence des deux lieux. Sont-ils de niveau tous les deux , alors l'eau coule difficilement ; dans le cas contraire , elle coule facilement ou pas du tout. Si tu veux , fais aussi un tuyau , adapte-le au cordeau , et expérimente avec l'eau , alors tu n'as besoin ni de fil à plomb ni de la tablette.

Une autre méthode : Place-toi au premier puits et pose la règle de l'astrolabe horizontalement ; ensuite qu'un autre prenne une perche dont la longueur est égale à la profondeur du puits ; qu'il s'en aille du côté vers lequel tu veux amener l'eau , et qu'il la tienne toujours dressée jusqu'à ce que tu en voies la pointe par le dioptré ; en cet endroit-là l'eau coule sur le sol. Si l'éloignement est si grand , que tu ne puisses pas voir la pointe de la perche , alors apporte une lumière et opère de nuit. *Et Lui sait cela bien mieux !*

DEUXIÈME SECTION.

Recherche de la hauteur des objets élevés.

S'il est possible de parvenir au pied de la verticale et si le terrain est uni , dresse un bâton verticalement , et place-toi de manière que les rayons de ton œil passent par la pointe du bâton et vers le sommet de la hauteur ; ensuite mesure à partir de ta station jusqu'au pied de la hauteur ; multiplie le résultat par l'excès du bâton sur ta hauteur , divise le produit par la distance de ta station au pied du bâton et ajoute au quotient ta hauteur , c'est alors la quantité demandée.

Une autre méthode : Mets à terre un miroir , de sorte que tu puisses voir dedans le sommet de l'objet élevé ; ensuite multiplie la distance du miroir au pied de la hauteur par ta taille et divise le produit par la distance du miroir à ta station ; le quotient est alors la hauteur.

Une autre méthode : Dresse un bâton et cherche le rapport de son ombre à sa longueur ; il est précisément le même que le rapport de l'ombre de la hauteur à la hauteur même.

Une autre méthode : Cherche la longueur de l'ombre au moment où la hauteur du soleil monte à 45 degrés , c'est en même temps la mesure de la hauteur.

Une autre méthode : Place la règle de l'astrolabe à 45 degrés et place-toi de telle sorte, que tu voies par le dioptré la pointe de la hauteur ; mesure ensuite depuis ta station jusqu'au pied de la hauteur, et ajoute au résultat ta taille : la somme est la quantité demandée.

Les démonstrations de ces manières de procéder sont exposées dans mon grand ouvrage. J'ai aussi pour la dernière méthode une démonstration élégante, pour laquelle personne ne m'a devancé, et que j'ai communiqué dans ma glose marginale dans le livre FARSIJJAT-OL-ASTROLABI (23).

(24). Mais si l'on ne peut pas parvenir au pied de la hauteur, d'une montagne, par exemple, alors regarde son sommet par la règle dioptrique, observe sur quelle ligne d'ombre se tient l'extrémité inférieure de la règle, et marque ta station. Ensuite tourne la règle sur une ligne d'ombre en avant ou en arrière, et ensuite avance ou recule jusqu'à ce que tu voies de nouveau la pointe de la hauteur. Mesure maintenant la distance entre les deux stations, et multiplie-la par 7 ou par 12, selon le mode de division de l'instrument.

TROISIÈME SECTION.

Recherche de la largeur des rivières et de la profondeur des puits.

Premièrement. Place-toi au bord de la rivière et observe son autre bord par la règle dioptrique, ensuite retourne-toi de manière à voir par la même règle dioptrique un endroit du sol, durant que l'astrolabe reste à sa place ; maintenant la distance entre ta station et cet endroit du sol est égale à la largeur de la rivière.

Secondement. Mets sur le puits quelque chose qui représente le diamètre de son contour, et laisse tomber en bas du milieu du diamètre, après que tu en auras marqué la place,

quelque chose de lourd et de brillant, afin qu'en vertu de sa nature cela parvienne au fond du puits. Ensuite vise l'objet brillant par la règle dioptrique, de manière que ta ligne de vision donne un point de section avec le diamètre. Maintenant multiplie la distance entre la marque et le point de section, par la hauteur de ta taille, et divise le produit par la distance de ce point à celui de ta station ; le quotient est la profondeur du puits (25).

HUITIÈME CHAPITRE.

RECHERCHE DES INCONNUES PAR LA METHODE DE L'ALGÈBRE.

Il se compose de deux sections.

PREMIÈRE SECTION.

On nomme l'inconnue : SHAÏ (chose), son produit par elle-même : MÀL (possession) ; le produit de SHAÏ par MÀL : CÂB (dé ou cube) ; de SHAÏ par CÂB : MÀL-I-MÀL ; de SHAÏ par MÀL-I-MÀL : MÀL-I-CÂB ; de SHAÏ par MÀL-I-CÂB : CÂB-I-CÂB, et ainsi de suite sans fin ; — d'abord viennent deux MÀL, ensuite l'un d'eux devient un CÂB puis tous les deux ; ainsi la septième puissance est MÀL-I-MÀL-I-CÂB, la huitième MÀL-I-CÂB-I-CÂB, la neuvième CÂB-I-CÂB-I-CÂB et ainsi de suite. Toutes ces puissances ascendantes et descendantes sont en proportion ; ainsi MÀL-I-MÀL est à CÂB comme CÂB est à MÀL, comme MÀL à SHAÏ, comme SHAÏ à UN, comme UN à UN DIVISÉ PAR SHAÏ, comme UN DIVISÉ PAR SHAÏ à UN DIVISÉ PAR MÀL (26).

Lorsque tu veux multiplier une puissance par une autre, additionne leurs nombres de position (exposants) si elles sont toutes deux d'un même côté de l'unité ; le produit est ensuite de même dénomination que cette somme ; par exemple : MÀL-I-CÂB par MÀL-I-MÀL-I-CÂB ; la première expression est de cinq, la seconde de sept degrés ; en conséquence, le produit est CÂB-I-CÂB-I-CÂB-I-CÂB quatre fois, et cela est véritablement la

douzième puissance. Si elles sont de côtés différents , alors le produit est du degré de l'excès, et du côté qui contient l'excès ; par exemple : UN DIVISÉ PAR MÀL-I-MÀL , multiplié par MÀL-I-CÂB , donne pour produit SHAÏ , et le produit de UN DIVISÉ PAR CÂB-I-CÂB-I-CÂB par MÀL-I-MÀL-I-CÂB , est : UN DIVISÉ PAR MÀL. S'il n'y a lieu à aucun excès , alors le produit porte le même nom que l'unité. L'explication plus exacte des méthodes de la division , de l'extraction de la racine carrée et des autres opérations est réservée pour mon ouvrage plus étendu.

Les opérations algébriques que les recherches des savants sont parvenues à découvrir , se bornent absolument à six , et leur exécution ne s'étend qu'au NOMBRE , à SHAÏ et à MÀL.

La table suivante sert à trouver les résultats de la multiplication et de la division de ces quantités , aussi l'ai-je admise ici pour plus de commodité et de brièveté ; voici sa composition :

Multiplicande.						
	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Mal	
Mal	Un	Shaï	Mal	Câb	Màl-i-Màl	Màl
Shaï	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Màl	Câb	Shaï
Un	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Màl	Un
Un div. par Shaï	Un div. par Câb	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Shaï	Un div. par Shaï
Un div. par Màl	Un div. par Màl-i-Màl	Un div. par Câb	Un div. par Màl	Un div. par Shaï	Un	Un div. par Màl
	Mal	Shaï	Un	Un div. par Shaï	Un div. par Màl	
Diviseur.						

Multiplie les coefficients des deux puissances l'un par l'autre , le résultat est le coefficient du produit , dont le degré est celui qui se trouve là où les deux facteurs se rencontrent.

Si une soustraction a lieu , alors la quantité dont on retranche quelque chose s'appelle *positive*, par compensation, la quantité retranchée s'appelle *negative*. La multiplication d'une quantité positive par sa pareille , et d'une négative par sa pareille , donne un résultat positif ; la multiplication de quantités d'espèces différentes donne un produit négatif. Multiplie les termes chacun à chacun , et retranche les négatifs des positifs. Par exemple : 10 et un shaï , multiplié par 10 moins un shaï , donne 100 moins māl ; 5 moins shaï par 7 moins shaï , donne 35 et 1 māl moins 12 shaï ; 4 māl et 6 moins 2 shaï par 3 shaï moins 5 , donne 12 cāb et 8 shaï moins (26 māl et 30). Dans la division , cherche ce qui , si tu le multiplies par le diviseur , devient égal au dividende ; pour cet effet , divise le coefficient du dividende par le coefficient du diviseur , c'est là le coefficient du quotient , dont le degré est celui qui se trouve là où le dividende et le diviseur se rencontrent.

DEUXIEME SECTION.

Sur les six (formes) algébriques.

La recherche des grandeurs inconnues , au moyen de l'algèbre , demande un coup d'œil pénétrant , une prudence sagace , de la contention d'esprit pour réfléchir sur ce que l'interrogateur a donné , et de la clairvoyance pour employer les moyens qui font trouver plus facilement la quantité demandée.

Pose pour le nombre demandé shaï , et emploie-le , comme le prescrit le problème , en procédant de manière à parvenir à une équation. Si un côté contient une négation , on la restaure en additionnant sa pareille avec l'autre côté , cela s'appelle AL GEHR (27) ; les termes de même espèce et de même valeur , dans les deux côtés , sont rejetés de l'un et de l'autre , et cela s'appelle : AL MOKABALAH. Ensuite l'égalité a lieu soit

entre un terme et un terme, et ce cas a trois formes, qui sont appelées MOUFRIDÂT (simples); soit entre un terme et deux termes, lequel cas a aussi trois formes qui se nomment MOUKTARINÂT (composées).

La première des formes MOUFRIDÂT: Un nombre connu est égal à un certain nombre de SHAÏ. Divise celui-là par le coefficient de celui-ci, le résultat est la quantité demandée. Exemple: quelqu'un a promis à ZAÏD 1000 et la moitié de ce qu'il a promis à AMROU, et à AMROU 1000 moins la moitié de ce qu'il a promis à ZAÏD. Appelle l'inconnue SHAÏ, alors AMROU a 1000 moins la moitié de SHAÏ, par suite ZAÏD a 1000 et 500 moins un quart de SHAÏ, et cela est égal à SHAÏ. Après GÈBR, 1500 est égal à 1 SHAÏ et un quart de SHAÏ; ainsi ZAÏD a 1200 et AMROU 400.

La seconde: des SHAÏ égalent des MÂL. Divise le coefficient de shaï par celui de mâl, le quotient est la quantité inconnue. Exemple: des enfants s'étaient approprié la succession de leur père, qui consistait en un certain nombre de *dinars*, de telle sorte que le premier en avait reçu: Un, le second deux, le troisième trois et ainsi de suite, en augmentant chaque fois de un. Le juge redemanda ce qu'ils avaient pris, et le partagea entre eux en portions égales; chacun en particulier en reçut sept. Combien d'enfants et combien de *dinars*? Pose le nombre des enfants: SHAÏ, prends les deux termes externes, c'est-à-dire UN et SHAÏ, et multiplie leur somme par la moitié de shaï, alors il vient une moitié de mâl et une moitié de shaï, c'est là le nombre de *dinars*; car le produit de la somme de l'unité et d'un nombre quelconque par la moitié de ce nombre, est égal à la somme des nombres naturels depuis 1 jusqu'à ce nombre. Actuellement divise le nombre des *dinars* par shaï, qui est le nombre des enfants, il en doit résulter 7, comme l'a dit celui qui a posé le problème. Ensuite multiplie 7 par shaï, qui est le diviseur,

il vient : 7 shaï égalent un demi māl et un demi shaï ; et après *gēbr* et *mokabalāh* , un māl est égal à 13 shaï ; d'où shaï égale 13 et c'est là le nombre des enfants ; multiplie-le par 7 , et il y a alors 91 *dinars*. — Tu peux encore résoudre cette question et celles du même genre , à l'aide de deux fausses positions ; mets-tu par exemple : pour le nombre des enfants , 5 , il y a alors une première déviation de 4 par défaut ; ensuite 9 , alors la seconde déviation est pareillement de 2 par défaut ; le premier résultat est 10 , le second 36. leur différence 26 et la différence des déviations 2. — Mais voici un autre chemin plus facile et plus court , c'est-à-dire que l'on double le quotient , et le résultat diminué de 1 est le nombre des enfants (28).

La troisième : Un nombre est égal à une certaine quantité de māl. Divise le nombre par le coefficient de māl , la racine carrée du quotient est la quantité inconnue. Exemple : on a promis à Zaïd la plus grande de deux sommes d'argent , dont la somme est 20 et dont le produit est 96. Pose pour l'une d'elles 10 et shaï , pour l'autre 10 moins shaï , leur produit est 100 moins māl , et cela est égal à 96. Après *gēbr* et *mokabalāh* , 1 māl est égal à 4 , et shaï égal à 2. Ainsi l'une des sommes est 8 , l'autre 12 ; c'est celle-ci la quantité demandée , celle qui lui a été promise.

La première des formes MOUKTARINĀT : Un nombre est égal à des shaï et à des māl. Complète la quantité de māl , de manière à être un entier , si elle est plus petite , et réduis-la à un seul , si elle est plus grande : modifie le nombre et les shaï dans le même rapport , en divisant tous les termes par le coefficient de māl. Ensuite élève au carré la moitié du coefficient des shaï , à ceci ajoute le nombre , et retranche de la racine carrée de cette somme le demi-coefficient des shaï , le reste est alors la quantité inconnue. Exemple : On a promis à Zaïd une partie de 10 , telle que la somme de son

carré et de son produit par la moitié de l'autre partie fasse 12.

Pose shaï, son carré est māl, et la moitié de l'autre partie : 5 moins un demi-shaï ; le produit de cette quantité par shaï est 5 shaï moins un demi-māl ; d'où un demi-māl et 5 shaï sont égaux à 12 ; 1 māl et 10 shaï égalent donc 24. Nous retranchons la moitié du coefficient de shaï, de la racine carrée de la somme faite du carré du demi-coefficient de shaï, et du nombre. Alors il reste 2, et c'est là la partie demandée, qui lui était promise.

La seconde : Des shaï égalent un nombre et des māl. Après avoir complété ou réduit, retranche le nombre du carré du demi-coefficient de shaï, et ajoute la racine carrée du reste au demi-coefficient, ou retranche-la de celui-ci, le résultat est alors le nombre demandé. Exemple : un nombre est multiplié par sa moitié, 12 est additionné avec le produit, et il en résulte le quintuple du nombre. Multiplie shaï par sa moitié, alors un demi-māl ajouté à 12 est égal à 5 shaï, d'où 1 māl et 24 est égal à 10 shaï ; soustrais 24 du carré de 5, alors il reste 1, dont la racine carrée est encore 1 ; si tu l'ajoutes à 5, ou si tu l'en retranches, il en résulte le nombre demandé.

La troisième : Des māl sont égaux à un nombre et à des shaï. Après avoir complété ou réduit, ajoute le carré du demi-coefficient de shaï au nombre, et la racine carrée de la somme au demi-coefficient de shaï, cette somme est alors le nombre demandé. Exemple : quel est le nombre, tel que si on le soustrait de son carré, et si on ajoute le reste à ce même carré, en obtienne 10 ? Nous retranchons shaï de māl, et nous continuons de faire ce qui est prescrit, alors il vient 2 māl moins shaï égalent 10. Après *gēbr* et *réduction*, māl devient égal à 5 et un demi de shaï. Le carré du demi-coefficient de shaï, ajouté à 5, donne 5 et un demi-huitième, dont la racine

carrée est 2 et un quart ; à ceci , ajoute un quart , il en résulte 2 et un demi , et c'est là le nombre demandé.

NEUVIÈME CHAPITRE.

RÈGLES INSIGNES ET ARTIFICES SUTILS , QUE LE CALCULATEUR NE PEUT ÉVITER , ET DONT IL LUI EST IMPOSSIBLE DE SE PASSER.

Je me suis borné à douze dans ce compendium.

La première règle (une de celles mises au jour par ma faible intelligence) : Si tu cherches le produit d'un nombre par lui-même, et par la somme de tous ceux qui le précèdent, ajoute-lui l'unité, et multiplie la somme par le carré de ce nombre ; la moitié de ce produit est le nombre demandé. Exemple : Nous cherchons le produit de 9, de la manière mentionnée ; nous multiplions 10 par 81 , alors 405 est la quantité demandée.

La seconde : Si tu cherches la somme des nombres impairs dans leur ordre naturel , alors ajoute 1 au dernier nombre impair , et carre la moitié de cette somme. Exemple : La somme des nombres impairs depuis 1 jusqu'à 9 est 25.

La troisième : Pour sommer les nombres pairs , à l'exclusion des impairs , tu multiplies la moitié du dernier nombre pair par le nombre entier qui est plus grand qu'elle de 1. Exemple : depuis 2 jusqu'à 10 ; nous multiplions 5 par 6.

La quatrième : La somme des carrés d'après l'ordre de succession. Ajoute 1 au double du dernier nombre , et multiplie un tiers de cette somme par la somme des nombres eux-mêmes. Exemple : Les carrés depuis 1 jusqu'à 6 ; nous ajoutons au double de 6 , l'unité ; un tiers de la somme est 4 et un tiers ; multiplie ceci par la somme des nombres eux-mêmes , c'est-à-dire par 21 , c'est alors 91 le résultat.

La cinquième : La somme des cubes d'après l'ordre de succession. Carre la somme des nombres eux-mêmes , rangés à

la file à partir de 1. Les cubes de 1 à 6 ; nous carrons 21 , la réponse est alors 441.

La sixième : Si tu cherches le produit des racines carrées de deux nombres , qui sont : ou rationnels tous les deux , ou irrationnels tous les deux , ou de natures différentes ; alors multiplie les nombres l'un par l'autre , la racine carrée du résultat est la quantité demandée. Exemple : le produit des racines carrées de 5 et de 20 , est la racine carrée de 100.

La septième : Si tu veux diviser la racine carrée d'un nombre par la racine carrée d'un autre , alors divise les nombres l'un par l'autre , ensuite la racine carrée du quotient est la quantité demandée. Exemple : la racine carrée de 100 divisée par la racine carrée de 25 donne la racine carrée de 4.

La huitième (29) : Si tu veux trouver un nombre parfait , ce qui veut dire un nombre tel qu'il soit égal à la somme des parties qui le mesurent , alors additionne les nombres croissants par voie de duplication à partir de l'unité ; si la somme n'est mesurée par aucun nombre en dehors de l'unité , alors multiplie-la par le dernier nombre additionné ; le produit est un nombre parfait. Exemple : nous additionnons 1 , 2 et 4 , et nous multiplions 7 par 4 , alors 28 est un nombre parfait.

La neuvième : Si tu veux trouver un nombre carré qui soit avec sa racine carrée dans le rapport d'un nombre donné à un autre nombre donné , alors divise le premier par le second ; le carré du quotient est la quantité demandée. Exemple : trouver un carré qui soit avec sa racine , comme 12 est à 4 ; le résultat , après que tu as divisé 12 par 4 , est 9. Si l'on eût dit : comme 12 est à 9 , alors la réponse eût été 1 et sept neuvièmes , puisque la racine carrée de ceci est 1 et un tiers.

La dixième : Si l'on multiplie un nombre quelconque par un autre et si on le divise par le même , puisque l'on multiplie le produit par le quotient , le résultat est alors égal au carré

du premier nombre. Exemple : nous multiplions le produit de 9 par 3 par le quotient qui naît de la division du premier nombre par le second , alors il vient 81.

La onzième : La différence entre deux carrés est égale au produit de la somme des racines carrées par la différence des racines carrées. Exemple : la différence entre 16 et 36 est 20 ; leurs racines carrées réunies font 10 et leur différence 2.

La douzième : Quand on divise deux nombres quelconques chacun l'un par l'autre , et que l'on multiplie les quotients entre eux , le résultat est , toutes les fois , l'unité. Exemple : si l'on divise 12 par 8, le quotient est 1 et un demi , et l'inverse deux tiers ; le produit des deux est 1.

Et que Lui soit mon aide pour l'accomplissement !

DIXIÈME CHAPITRE.

PROBLÈMES DÉTACHÉS, D'APRÈS DIFFÉRENTES MÉTHODES QUI AIGUISSENT
L'INTELLIGENCE DE CELUI QUI APPREND ET LE FORTIFIENT DANS LA
RECHERCHE DES INCONNUES.

Premier problème.

Un nombre est doublé, à ceci on ajoute 1 ; on multiplie la somme par 3, à ceci on ajoute 2 ; on multiplie cette somme par 4 , et avec cela on additionne 3 : il en résulte 95.

Par l'algèbre. Nous faisons ce qui est prescrit , et il vient 24 shaï et 23 égalent 95. Après l'expulsion de la partie commune , les 24 shaï égalent 72 ; et ceci est la première des formes *Moufridât* , le quotient 3 , et c'est le nombre demandé.

Par la fausse position. Nous prenons 2 , alors nous dévions de 24 par défaut ; ensuite 5 , alors nous dévions de 48 par excès. Le premier résultat est 96, le second 120, nous

divisons leur somme par celle des déviations, le quotient est 3.

Par inversion. Nous soustrayons 3 de 95 et nous menons l'opération à ce point, que nous divisons 21 par 3, de 7 nous retranchons 1, et nous démidions le reste.

Deuxième problème.

S'il est dit : partage 10 en deux parts, dont la différence soit 5.

Par l'algèbre. Pose la plus petite part : shaï, alors la plus grande est shaï et 5, et leur somme 2 shaï et 5 est égale à 10 ; après mokabalâh, shaï est égal à 2 et un demi.

Par fausse position. Nous prenons pour la plus petite part 3, alors la première déviation est 1 par excès ; ensuite 4, alors la seconde déviation est 3 par excès ; la différence des résultats est 5 et celle des déviations 2.

Par inversion (30). Comme la différence entre les deux parties d'un nombre est deux fois aussi grande que la différence entre le demi-nombre et l'une des parties, il en résulte que, si tu ajoutes la moitié de cette différence au demi-nombre, tu obtiens 7 et un demi ; et si tu l'en soustrais, il reste 2 et un demi.

Troisième problème.

Nous ajoutons à une somme d'argent son cinquième et cinq dirhems, nous retranchons de ce qui en résulte le tiers et cinq dirhems, et alors il ne reste rien.

Par l'algèbre. Pose pour la somme d'argent shaï et retranche de un shaï et un cinquième de shaï et 5, un tiers de cette somme, alors il reste 4 cinquièmes de shaï et 3 et un tiers ; si de cela 5 est retranché, il ne reste rien : donc cela est égal à 5. Après l'expulsion de la quantité commune, 4 cinquièmes de shaï égalent 1 et 2 tiers. Divise donc 1 et

2 tiers par 4 cinquièmes, le quotient est alors 2 et 1 douzième, et c'est le nombre demandé.

Par fausse position. Si nous prenons 5, la première déviation est 2 et 1 tiers par excès; si nous prenons 2, alors la seconde déviation est de 1 quinzième par défaut; d'où le premier résultat est 1 tiers, le second 4 et 2 tiers. Si nous divisons leur somme par la somme des déviations, c'est-à-dire par 2 et 1 tiers et 1 quinzième, ce qui est 2 et 2 cinquièmes, le quotient est alors 2 et 1 douzième.

Par inversion (31). Prends le 5, après la soustraction duquel il n'y a aucun reste, et ajoute-lui sa moitié, puisque c'était le tiers que l'on retranchait; ensuite soustrais de la somme 5 et de ce reste son sixième, puisque c'était le cinquième que l'on ajoutait.

Quatrième problème.

Quatre tuyaux conduisent à un vase, l'un d'eux le remplit en un jour, et chacun des suivants en un jour de plus; en combien de temps sera-t-il rempli?

Par proportion. Il est hors de doute que les quatre tuyaux, dans un jour, emplissent deux vases égaux au précédent, et, outre cela, encore 1 douzième. Or, ces quantités, 1 jour et 2 vases et plus douzième, sont dans le même rapport que le temps demandé avec le vase. L'inconnue est un des termes moyens; divise donc 1 par 2 un douzième, le quotient est 2 cinquièmes et 2 vingt-cinquièmes: car le diviseur est 25 douzièmes et le dividende 12 douzièmes.

D'une autre manière; les quatre remplissent en un jour un vase qui contient 25 parties, dont le premier vase contient 12; et chaque partie est remplie dans la même partie du jour; d'où il suit que le premier vase est rempli en 12 des 25 parties d'un jour.

S'il était encore dit : Et en même temps est ouvert en bas un tuyau qui le vide en 8 jours, alors il n'y a pas de doute qu'à présent le quatrième tuyau remplit en un jour 1 huitième du vase ; par conséquent, les quatre tuyaux remplissent en un jour un vase égal au premier et ses 23 vingt-quatrième. Or, un jour est avec ce nombre dans le même rapport que le temps demandé avec le vase. Ainsi, divise le produit des termes externes par le terme moyen, le quotient est 24 quarante-septièmes.

De l'autre manière, les quatre remplissent en un jour un vase qui a 47 parties, dont 24 entrent dans le premier vase. Le reste est clair.

Cinquième problème.

Un tiers d'un poisson est enfoncé dans la vase, un quart dans l'eau, et il ressort de l'eau d'une longueur de 3 empan ; de combien d'empan est-il long ?

Par proportion ; soustrais les deux dénominateurs de leur dénominateur commun, il reste 5 ; et 12 est avec 5 dans le même rapport que l'inconnue avec 3 ; le quotient, si tu divises le produit des termes externes par le terme moyen, est 7 et 1 cinquième, c'est là la longueur demandée.

Par l'algèbre ; cela est clair ; car tu poses shaï moins 1 tiers de shaï moins 1 quart de shaï, ce qui est 1 quart et 1 sixième de shaï, égale 3 ; ensuite divise trois par la fraction, alors il vient le résultat précédent.

Par fausse position ; cela est tout à fait clair, car tu poses 12, ensuite 24, alors la différence des résultats est 36 et la différence des déviations 5.

Par inversion ; ajoute à 3 son égal et ses 2 cinquièmes, puisque un tiers et un quart de tout nombre est égal à ce qui reste encore et aux deux cinquièmes de ce reste (32). Compare avec ceci les problèmes semblables, en considérant le

rapport entre les fractions soustraites et ce qui reste, exprimé par le dénominateur général et en ajoutant au nombre que celui qui, a posé le problème a donné, ce que ce rapport exige.

Sixième problème.

Deux personnes étaient présentes à la vente d'un cheval ; l'une d'elles disait à l'autre : ajoute avec ce que j'ai un tiers de ce que tu as, j'ai alors le prix du cheval ; l'autre répondait : ajoute avec ce que j'ai un quart de ce que tu as, et j'ai le prix. Combien avait chacune d'elles et à combien s'élevait le prix ?

Par l'algèbre ; pose ce qu'a la première : shaï ; ce qu'a la seconde : 3, à cause du tiers ; si maintenant la première prend 1 de ces 3, alors elle a shaï et 1, et voilà le prix ; mais si la seconde obtient ce qu'elle demande, alors elle a 3 et 1 quart de shaï, et ceci est égal à shaï et 1. Après mokabalâh, 2 devient égal aux 3 quarts de shaï, et shaï égal à 2 et 2 tiers ; la seconde avait, comme il a été dit, 3 ; le prix est ainsi : 3 et 2 tiers.

Si tu prends au lieu des fractions les nombres entiers, alors la première a 8, la seconde 9, et le prix est 11.

(33). Ce problème est indéterminé, et pour résoudre ce problème et ceux qui sont semblables, il y a une méthode facile qui n'est pas rangée parmi les méthodes connues ; elle consiste en ceci que dans chaque cas, on soustrait 1 du produit des dénominateurs des deux fractions, ce qui reste est le prix de l'animal ; puis on soustrait l'un des dénominateurs, ce qui reste est ce qu'a la première (personne) ; puis l'autre dénominateur, ce qui reste alors est ce qu'a la seconde. Dans l'exemple soustrais de 12, premièrement 1 ensuite 4, ensuite 3, ce sont les restes qui sont les trois nombres demandés.

Septième problème.

Trois coupes sont remplies, la première de 4 livres de miel, une autre de 5 livres de vinaigre, une troisième de 9 livres d'eau. Les trois substances sont versées dans un vase et mélangées jusqu'à faire de l'oximel ; ensuite on en remplit de nouveau les coupes ; on demande combien dans chaque coupe il y aura de chaque sorte de substance (34).

Ajoute les poids et retiens bien la somme ; ensuite multiplie le nombre de livres qui se trouve dans chaque coupe, par chacun des trois poids, et divise le produit par la somme conservée dans ta pensée, c'est le quotient qui est le poids de ce qui se trouve dans la coupe de la même sorte que le multiplicateur. Ainsi multiplie 4 par lui-même, et divise le produit comme il est dit ci-dessus, il y a alors dans la coupe de 4 livres, 8 neuvièmes de livre de miel ; ensuite multiplie 4 par 5, etc. ; et dans cette même coupe il y a 1 livre et un neuvième de vinaigre ; ensuite par 9, etc. ; et dans cette même coupe il y a 2 livres d'eau ; le tout réuni fait 4 livres. D'autre part multiplie 5 par lui-même, par 4 et par 9, et fais comme il est enseigné, alors il se trouve dans la coupe de 5 livres, 1 livre et 7 dix-huitièmes de vinaigre, 1 livre et 1 neuvième de miel, et 2 livres et demie d'eau, ensemble 5 livres. Enfin procède de même avec 9, alors il se trouve dans la coupe de 9 livres : 2 livres de miel, 2 livres et demie de vinaigre et 4 livres et demie d'eau, ensemble 9 livres.

Huitième problème.

On demandait à quelqu'un combien il s'était écoulé de la nuit. Il répondit : Un tiers du temps écoulé est égal à un quart de celui qui reste encore. Combien s'était-il écoulé de temps et combien en restait-il encore ?

Par l'algèbre. Pose le temps écoulé shaï, alors ce qui reste est 12 moins shaï; d'où un tiers du temps écoulé est égal à 3 moins un quart de shaï. Après l'application de *gèbr*, un tiers et un quart du temps écoulé est égal à 3. Le quotient est 5 et un septième, et c'est le nombre des heures écoulées; le reste se monte ainsi à 6 heures 6 septièmes.

Par proportion. Pose le temps écoulé : shaï et le reste 4 heures à cause du quart; alors un tiers de shaï égale 1 heure; d'où shaï égale 3 heures, et la somme 7. Maintenant 3 est avec 7 dans le même rapport que le nombre inconnu avec 12. Divise donc le produit des termes externes par le terme moyen, alors le quotient est 5 un septième.

Neuvième problème.

Une perche est enfoncée dans un étang et ressort de l'eau de cinq aunes. Son bout inférieur restant solidement fixe, elle s'incline jusqu'à ce que sa pointe supérieure touche la surface plane de l'eau; la distance entre l'endroit où elle ressortait de l'eau, et l'endroit où sa pointe touche l'eau est de dix aunes. Quelle est la longueur de la perche?

Par l'algèbre. Pose la partie cachée dans l'eau . shaï, alors la perche est 5 et shaï, et il est clair qu'après son inclinaison elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est 10 aunes, et dont l'autre est la mesure de la partie enfoncée dans l'eau, c'est-à-dire shaï. Par conséquent le carré de la perche, c'est-à-dire 25 et 1 māl et 10 shaï, est égal aux carrés de 10 et de shaï, c'est-à-dire 100 et 1 māl, d'après la proposition connue (35). Après l'expulsion de ce qui est commun, il reste 10 shaï égalent 75, et le quotient est 7 et un demi, et c'est là la mesure de la partie enfoncée dans l'eau. La perche est donc longue de 12 aunes et demie.

Pour la résolution de ce problème et autres semblables , il y a encore d'autres méthodes , que tu peux chercher avec leurs démonstrations dans mon livre plus étendu ; que Dieu le très-haut veuille m'assister dans son achèvement !

CONCLUSION.

Les savants qui sont forts dans cette doctrine , ont rencontré certains problèmes , dont la résolution a fixé leurs méditations , et dont la recherche a attiré leurs regards ; ils ont entrepris par toutes sortes d'artifices de soulever le voile et ont tenté par tous les moyens d'arracher le rideau , mais ils n'ont pu découvrir aucun chemin et ils n'ont trouvé personne pour leur indiquer la route , personne pour les conduire. Depuis le temps que ces problèmes demeurent insolubles , ils se sont montrés rebelles contre tous les génies jusqu'à cette époque. Les savants compétents en ont mentionné quelques-uns dans leurs écrits , et en ont proposé une partie dans leurs recueils , pour prouver que cette science contient des difficultés capables de rebuter ; pour réduire au silence ceux là qui prétendent qu'en fait de calcul , il n'est absolument rien qu'ils ne puissent exécuter , pour prévenir les calculateurs de ne pas prendre la peine de chercher la solution , si quelques questions de ce genre leur sont proposées , et pour exciter à les résoudre et à les dévoiler , ceux qui sont doués de facultés brillantes. C'est pourquoi , je produis dans ce traité sept de ces problèmes comme modèle , pour suivre les vestiges de ces hommes d'élite et pour marcher sur leurs traces. Ce sont les suivants :

1. Diviser 10 en deux parties , de telle sorte que si l'on ajoute à chacune d'elles sa racine carrée , et si l'on multiplie les deux sommes l'une par l'autre , il en résulte un nombre donné.

2. Si, à un carré l'on ajoute 10, alors la somme doit avoir une racine carrée, et si l'on en soustrait 10, le reste doit de même avoir une racine carrée.

3. A Zaïd l'on promet 10 moins la racine carrée de la part d'Amrou, et à Amrou 5 moins la racine carrée de la part qui a été promise à Zaïd.

4. Un nombre cube doit être partagé en deux parties, qui soient aussi des nombres cubes.

5. Dix est partagé en deux parties. Si nous divisons chacune d'elles par l'autre, et si nous additionnons les deux quotients, alors la somme est égale à l'une des deux parties de dix.

6. Trois carrés en proportion continue, dont la somme est un carré.

7. Si à un carré on ajoute sa racine et 2, si ensuite de ce même carré on retranche sa racine et 2, alors on doit pouvoir extraire la racine carrée de la somme et du reste.

Eh bien donc ! sache, ô noble frère, toi qui aspires après la précieuse richesse des problèmes, que réellement, je t'offre dans cette œuvre petite à la vérité, mais noble perle des bijoux nuptiaux de l'arithmétique, ce qui jusqu'à présent, n'a été réuni ni dans un traité ni dans un livre; reconnais donc sa valeur, et n'amoindris pas ce présent de noces; protège cette œuvre contre tous ceux qui n'appartiennent pas à sa famille, et ne l'envoie à personne autre qu'à celui qui souhaite de devenir son époux; ne la donne pas à un vil prétendant, afin que tu n'attaches pas des perles au cou d'un chien. Vraiment, la plupart de ses problèmes sont dignes de conservation et de soin, et méritent qu'on les cache à la plupart des hommes de ce temps-ci. Garde fermement mon legs avec toi, Dieu te gardera de même. Louanges au Seigneur, qui a favorisé son accomplissement, et m'a fait la grâce d'arriver à la conclusion (36).

NOTES.

Les notes qui ne sont pas extraites de celles de M. Nesselmann, sont signées A. M.

(1) Ces quatre parents du prophète sont : sa fille **FATIME** avec son époux **ALI** et ses deux fils **HASAN** et **HOSSEÏN**, que l'auteur poursuivant ses jeux de mots intraduisibles, appelle les quatre termes d'une proportion.

(2) On sait que les Persans reconnaissent **ALI** pour légitime successeur de **MOHAMMED** et sont appelés Shyites ou Schismatiques par les Turcs qui les regardent comme des hérétiques.

BEHA-EDDIN était très - vraisemblablement de la secte des Shyites.

(3) Les Grecs disaient *logoi* et *alogoi*, *effables* et *ineffables*, ou bien si l'on veut : *dicibles* et *indicibles*. Comme *logos* signifie en même temps *raison*, les Latins ont traduit par rationnels et irrationnels et nous les avons imités. Voir l'origine des expressions *rationnel* et *irrationnel*, expliquée par Kepler (*Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, tome I, p. 101). A. M.

(4) Non-seulement **BEHA-EDDIN**, mais suivant **M. STRACHEY** (*Asiat. Resear.*, t. XII), tous les auteurs d'arithmétique arabes ou persans, regardent les Hindous comme les inventeurs des figures numérales de l'échelle décimale. Le passage suivant a été extrait par ce savant Anglais d'un traité d'arithmétique persan :

« Les sages de l'Inde voulant représenter convenablement les nombres, inventèrent ces neuf figures (*fig. 4*) :

» Quand une figure occupe la première place à droite, elle est regardée par eux, comme exprimant les unités; la deuxième, les dizaines; la troisième, les centaines; la quatrième, les mille; ainsi après le troisième rang, la première figure qui suit immédiatement représente les unités de mille, la deuxième les dizaines de mille, la troisième les centaines de mille et ainsi de suite. En conséquence, toute figure au premier rang vaut le nombre d'unités qu'elle exprime; toute figure au second rang vaut le nombre de dizaines que sa forme indique; au troisième rang, le nombre des

centaines, et ainsi de suite. Quand une figure est vacante à l'un des rangs, l'on écrit un chiffre semblable à un petit cercle 0 pour conserver sa place. »

A cause de la similitude du chiffre cinq et du petit cercle choisi primitivement par les Hindous, comme symbole du vide, les Arabes, les Malais, les Persans, etc., marquent le zéro par un point. A. M.

(5) *Balance* est la traduction fidèle du mot arabe *mizann* qui se trouve dans le texte. Nous avons préféré ce mot au mot *norm* adopté par M. Nesselmann. M. Taylor de Bombay dit positivement que les Arabes appellent *balance*, la preuve par 9, qu'ils appliquent à leurs règles arithmétiques (V. *Hist. de l'Astron. anc.* de Delambre, dern. chapitre). Il est vrai que selon lui le mot est *tarazou* et non *mizann*, mais *tarazou* est plutôt persan qu'arabe.

A. M.

(6) L'auteur appelle nombre simple, non-seulement le nombre qui n'a qu'un chiffre, mais encore le produit d'un nombre d'un chiffre par une puissance quelconque de 10; et nombre composé, celui qui est formé de plusieurs chiffres significatifs.

(7) M. Strachey trouve cette règle remarquable en ce que son application a quelque point de ressemblance avec l'usage des tables de Logarithmes; mais selon M. Delambre, ce n'est rien autre chose que la méthode des *fonds* substitués aux *analogues*, qu'il a expliquée dans son arithmétique des Grecs.

A. M.

(8) L'application de cette règle devient superflue pour le cas où les deux facteurs sont l'un et l'autre au-dessous de 5, mais la règle est toujours vraie. Dans le cas même énoncé par l'auteur, le moyen de trouver le produit, formulé par lui, paraîtra inutile au premier abord, mais nous devons réfléchir que cette méthode ne suppose pas la connaissance préalable de la table de multiplication, dite de Pythagore; bien plus, l'existence seule de cette règle peut paraître un argument contre l'opinion avancée par Hutton et beaucoup d'autres après lui, que les Arabes sont redevables de leur algèbre aux Grecs.

A. M.

(9) Cette règle est applicable au cas où les deux nombres au lieu d'être resserrés entre 20 et 100, sont compris entre 10 et 100.

A. M.

(10) On observera que l'inspection du Shabacah ou réseau, suffit pour démontrer que le nombre des chiffres d'un produit de deux nombres, a pour maximum la somme des nombres de chiffres des facteurs et pour minimum, cette somme diminuée de 1.

L'usage de cette table ressemble à celui des bâtons de NEPER. Suivant M. TAYLOR de Bombay, cette méthode est enseignée dans toutes les écoles de l'Inde ; mais elle ne se trouve dans aucun livre Sanscrit ; les astronomes n'en font aucun usage. A. M.

(11) Pour nous qui écrivons de gauche à droite, c'est le second au lieu de l'avant-dernier ; ceci doit être observé une fois pour toutes.

(12) Cette règle mérite d'être remarquée ; elle suppose l'égalité approximative :

$$\sqrt{a^2 + \varepsilon} = a + \frac{\varepsilon}{2a+1}, \text{ d'où } a^2 + \varepsilon = a^2 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2a+1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2a+1}\right).$$

Or, dans la pratique, $\varepsilon < 2a+1$; d'où il suit que l'on obtient pour la racine cherchée, une erreur toujours par défaut. Le maximum d'approximation a lieu pour $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 2a$; dans ces deux cas, la valeur trouvée pour le carré est trop petite de $\frac{2a}{(2a+1)^2}$; plus ε s'écarte de ces deux limites, et plus l'erreur est grande. Nous devons observer qu'elle sera toujours la même, soit que l'on pose $\varepsilon = 1 + n$ ou $\varepsilon = 2a - n$.

ROUSHEN ALI donne une seconde formule :

$$\sqrt{a^2 + \varepsilon} = a + \frac{\varepsilon}{2a}$$

qui fournit une approximation par excès.

(13) Ici il y a erreur, car il peut arriver que le reste soit égal au carré soustrait. Supposons par exemple que la dernière tranche à gauche du nombre proposé soit 8. Le carré que l'on en devra soustraire est 4 et le reste aussi 4. Voici donc un exemple qui prouve que le reste peut égaler le carré soustrait. Si, de même que M. Nes-selmann, je suppose que la dernière tranche à gauche soit 3, c'est-à-dire que le plus grand nombre cherché soit 1, évidemment j'aurai un reste plus grand que le carré soustrait ; mais il me semble que de cet exemple unique, parfaitement vrai au fond, on ne peut ri-

goureusement se prévaloir contre l'auteur ; en effet Behà-Eddin dans son Introduction dit en termes formels : *la vérité est que l'unité n'est pas un nombre* ; pour lui 1 ne peut donc être ce plus grand nombre parmi les unités qu'il prescrit de chercher.

A. M.

(14) La langue arabe n'a de noms simples que pour les fractions dont le dénominateur ne contient que les nombres depuis 2 jusqu'à 10. De là, pour cette classe de fractions, le nom de *articulées*, qui peuvent s'exprimer seules, sans secours étranger. Quant aux autres fractions, qui portent le nom de *muettes*, elles doivent s'exprimer à l'aide des *articulées*. Les premières, si je peux m'exprimer ainsi, jouent le rôle des voyelles, et les secondes, le rôle des consonnes.

Quand un dénominateur a une valeur plus grande que 10, les Arabes le décomposent en facteurs tous moindres que 11, si cela est possible. Quand cela n'est pas praticable, ils décomposent néanmoins le dénominateur en ses facteurs quelconques, et lisent l'expression qui en résulte, comme ce que nous appelons fractions de fractions.

(15) Ce dernier paragraphe suppose l'année de 360 jours, le mois de 30 jours et la semaine de 7. Cette année n'existe pas chez les Arabes qui ont l'année lunaire de 354 et 355 jours, mais bien chez les Persans, en faisant abstraction toutefois de leurs cinq jours supplémentaires pour compléter l'année solaire.

La lettre Aïn de l'alphabet arabe se rencontre dans les noms arabes des nombres 4, 7, 9, 10.

(16) Le dirhem est vraisemblablement le même mot que drachme. Mais il y avait différentes sortes de dirhems chez les Arabes, de même que différentes sortes de drachmes chez les Grecs ; on ne saurait donc établir ici le rapport du dirhem dont il s'agit, à toute autre unité monétaire.

A. M.

(17) La suite des opérations à effectuer, indiquées par l'auteur dans cette dernière question, a besoin d'une courte explication.

Le problème mis en équation, donne :

$$1^{\circ} \quad \left(x + \frac{x}{2} + 4\right) + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x}{2} + 4\right) + 4 = 20.$$

$$\begin{aligned}
 2^e \quad & \frac{3}{2} \left(x + \frac{x}{2} + 4 \right) = 16 \\
 & x + \frac{x}{2} + 4 = 10 \frac{2}{3} \\
 & \frac{3}{2} x = 6 \frac{2}{3} \\
 & x = 6 \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(6 \frac{2}{3} \right) = 4 \frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

(17 bis) Les Arabes donnaient à la droite les noms de *côté*, *hauteur*, *diamètre*, *diagonale*, *perpendiculaire*, *flanc*, etc.

(18) Rouschen Ali s'exprime ainsi : « on ne trouvera dans aucun livre une description de cette sorte de trapèze, pour éclaircir ce point ; Dieu, peut-être, l'apprendra dans un temps à venir. » Le savant docteur Nesselmann avoue n'en savoir rien de plus. D'après le commentaire de Nasr Eddin, sur Euclide, les Arabes avaient pour le trapèze une définition plus large que la nôtre, et qui la renferme comme cas particulier. Une des figures qu'il donne comme représentant un trapèze n'a pas de côtés parallèles, n'a qu'un angle aigu, et paraît avoir des diagonales à angle droit. C'est peut-être là le concombre de Beha-Eddin. A. M.

(19) D'après Rouschen Ali, ces trois figures sont celles du n° 1 de la planche.

(20) Appelons a la base, b le côté moyen, c le plus petit côté, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2a - x \\
 2a - x &= a^2 + c^2 - b^2 \\
 x &= \frac{a}{2} - \frac{b^2 - c^2}{2a}.
 \end{aligned}$$

Or $b^2 - c^2 = (b + c)(b - c)$

donc $x = \frac{a}{2} - \frac{(b + c)(b - c)}{2a}.$

A. M.

(21) L'aire du triangle est $\frac{ax}{2}$, en appelant a la base, et x la hauteur.

Mais $x^2 = a^2 \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$; d'où $x = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

donc $\frac{ax}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}}. \text{ c. q. f. d.}$

A. M.

(22) La seconde règle ici posée pour trouver le volume de la sphère est défectueuse, car son application conduirait à la valeur $\pi=2,91\dots\dots$, comme le fait remarquer M. Nesselmann. Cependant je n'y puis voir, comme lui, une faute grossière, mais seulement un énoncé mal conçu, que l'on pourrait remplacer par celui-ci : *retranchez du cube du diamètre ses trois quatorzièmes, puis du reste le tiers de ce reste même*; cette règle coïncidera parfaitement avec la formule : vol. sphérik. $= \frac{1}{6}\pi D^3. \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$.

Il n'est pas vraisemblable que l'auteur, après avoir donné un premier moyen exact pour mesurer le volume de la sphère, ait pu en proposer et conserver un éminemment faux.

A. M.

(23) ROUSHEN ALI n'a jamais vu la glose dont il est ici question, et il pense que l'auteur a voulu sans doute faire allusion au traité en 20 chapitres, composé par МОНАХИКЪ DE THUSS.

(24) Je reproduirai ici la note textuelle de M. Nesselmann :

Ici l'auteur est inintelligible et j'avoue que je n'ai pu me tirer de ce labyrinthe, qu'à l'aide du commentaire qui commence ainsi : « Sache que plusieurs divisent l'instrument en douze parties égales et d'autres en sept. Dans le premier cas, chaque ligne d'ombre (de division) reçoit le nom de *doigt*; dans le second cas, on l'appelle *pied*. » Cette explication comparée avec la règle donnée par l'auteur donne l'idée suivante de la construction de l'instrument. Soit le carré ABCD (*fig 2*), l'alidade tourne autour du point fixe A et si le côté BC est divisé en douze ou en sept parties égales les lignes qui vont de A en E (point de division) se nomment lignes d'ombre. Voici maintenant le procédé qui n'est pas complètement expliqué dans l'auteur. Soit SP la hauteur à mesurer, on se place avec l'instrument *abcd* en G, de sorte que le rayon Sa rencontre un point de division *e*, ensuite on amène l'alidade sur la division voisine *e'* et on marche vers G', jusqu'à ce que l'alidade Sa' passe par *e'*. Supposons que le nombre des divisions soit représenté par *n*, on a les proportions suivantes :

$$\begin{aligned} eb : ba &:: aT : TS \\ e'b' : b'a' &:: a'T : TS \end{aligned}$$

mais $ba = b'a'$, on a donc $eb : e'b' :: aT : a'T$.

D'où $eb : e'b - eb :: aT : GG'$, donc $aT = \frac{eb - GG'}{e'b - eb}$.

D'où il suit que $TS = \frac{ba.GG'}{e'b - eb}$.

Le dénominateur $= \frac{ab}{n}$, d'où $TS = n.GG'$.

Ce qui est la règle de Beha-Eddin. Le commentateur observe qu'il faut ajouter à ce résultat la taille de l'observateur, c'est-à-dire *Ga* ou *PT* pour avoir la hauteur totale.

(25) L'impossibilité d'obtenir des résultats exacts, par l'une ou l'autre de ces opérations, est assez évidente. La première est fondée sur ce principe, que sur une surface plane, deux points sont à égale distance du pied de la hauteur donnée de l'œil de l'observateur, quand les lignes de vision passant respectivement par ces points, sont également inclinées à l'horizon.

La seconde opération est celle-ci : laissez tomber le corps de *A* en *E* (fig 3), placez-vous en *CD* par exemple et observez le corps suivant la ligne *DE* qui coupe *AC* en *B*. Alors vous avez la proportion

$$BC : CD :: AB : AE = \frac{AB \times CD}{BC}.$$

(Strachey.)

(26) J'ai conservé les dénominations arabes : *Shaï*, *mâl*, *câb*, *mâl-i-mâl*, *mâl-i-câb*, etc., plutôt que d'essayer de les traduire par des mots équivalents, ce que le docteur Nesselmann a pu faire grâce à la facilité avec laquelle la langue allemande se prête à la formation des mots composés.

Les Arabes appelaient l'inconnue (et ils n'en employaient qu'une) *Shaï* (chose). Les premiers algébristes de l'Europe chrétienne, JEAN HISPALENSIS, GÉRARD de CRÉMONA, LÉONARD de PISE et ses disciples, ont traduit ce terme par le mot latin correspondant *res* et l'Italien *cosa*; d'où : *Regola della cosa*, Règle de *coss*, pratique *cossike* et nombre *cossike* (racine d'une équation) chez nos plus anciens auteurs (ROBERT RECORDE, *la pierre à aiguïser du jugement*); les Arabes appelaient le carré de l'inconnue *mâl* possession ou biens, en latin *cenſus*, en italien *cenſo*, termes de même signification et pris également par LÉONARD de PISE sous l'acception du montant des biens ou propriétés (CENSUS : *quicquid fortunarum quis habet*. STEPH. *Thes.*). Le cube était appelé par les Arabes *câb*, dé ou cube; ils combinaient

ces termes *māl* et *cāb*, pour la formation de puissances plus élevées, à la manière de DIOPHANTE, en faisant la somme des degrés, et non pas comme les Hindous en considérant leurs produits.

PACIOLO observe expressément qu'en dehors des 6 formes ici prescrites il n'y a pas d'équation possible : *altramente che in questi 6 discorsi modi non e possibile alcuna loro equatione*. A. M.

(27) Il est assez curieux que les Grecs, les prétendus inventeurs de l'algèbre, n'aient même pas dans leur langue, un mot pour désigner cette science, et que nous ayons emprunté aux Arabes, un terme qui pour eux exprimait une simple opération pour en faire le nom de la science elle-même. L'opération essentielle, qui consiste à *restaurer*, à *raccommoder*, s'appelle *gebr* ou avec l'article *al gebr*. Quand dans un membre d'une équation une quantité positive (*zāid*) est suivie ou affectée d'une quantité négative (*nākis*), on restaure la quantité positive, c'est-à-dire qu'on la rétablit dans son intégrité (CHASLES). La seconde opération essentielle, qui consiste à *comparer* les termes et à supprimer les valeurs égales de chaque côté, est appelée par les Arabes : *Mokabalah*. De là le nom de *Tarik al gebr wa almokabalah* (Méthode de restauration et de comparaison), pour cette branche de l'analyse, chez les Arabes, de là notre nom d'algèbre emprunté textuellement par LÉONARD de PISE et tous les plus anciens algébristes européens.

A. M.

(28) Soit x le nombre des enfants, $\frac{(x+1)x}{2}$ sera le nombre total des *dinars*; $\frac{(x+1)^{\frac{x}{2}}}{x}$ sera la part de chacun, d'après l'énoncé cette dernière valeur est égale à 7, nous aurons donc l'équation $\frac{(x+1)}{2} = 7$, d'où $x = 13$. Plus généralement, soit n la part rectifiée, le nombre des *dinars* sera nx ; d'autre part, d'après le partage primitif, la totalité des *dinars* était $\frac{(x+1)x}{2}$. D'où il suit que $\frac{(x+1)x}{2} = nx$ ou $x = 2n - 1$.

(29) Pour la définition du nombre parfait, voyez EUCLIDE (livre 7, déf. 22), et pour la règle : livre 9, proposition 36

(30) Soient x et y les deux parties d'un nombre a :

$$x + y = a$$

$$x = a - y$$

$$x - y = a - 2y = 2\left(\frac{1}{2}a - y\right)$$

égalité sur laquelle l'auteur s'appuie.

Si $x - y = 5$, on a donc $\frac{5}{2} = \frac{1}{2}a - y$.

Si actuellement on ajoute le demi-nombre, l'on a :

$$\frac{5}{2} + 5 = a - y = x$$

d'où $x = 7\frac{1}{2}$ et $y = 2\frac{1}{2}$.

(31) Voici le tableau des opérations indiquées par l'auteur :

$$\left(x + \frac{x}{5} + 5\right) \times \frac{2}{3} = 5$$

$$x + \frac{x}{5} + 5 = 5 + \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{x}{5} + \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{6x}{5} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{6x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{5}{2} - \frac{5}{12}$$

d'où : $x = 2\frac{1}{12}$.

(32) C'est-à-dire que $\frac{7}{12} = \frac{5}{12} + \frac{2}{5}$ de $\frac{5}{12}$.

(33) Soit x ce qu'a la première personne, y ce qu'a la seconde,

P le prix du cheval, $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$ les fractions générales substituées à

$\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. On a alors : $P = x + \frac{1}{m}y$ et $P = y + \frac{1}{n}x$,

d'où $x + \frac{1}{m}y = y + \frac{1}{n}x$ ou bien $x\left(1 - \frac{1}{n}\right) = y\left(1 - \frac{1}{m}\right)$

$$\frac{x}{y} = \frac{mn - n}{mn - m}$$

si l'on pose $x = mn - n$ et $y = mn - m$, il en résulte $P = mn - 1$.

(34) Soient a, b, c , les nombres de livres de miel, de vinaigre, d'eau. Le mélange contient $(a + b + c)$ livres. De ces $(a + b + c)$

livres, on prend l livres je suppose, et l'on veut trouver dans quelle proportion, pour chaque coupe, le miel, le vinaigre et l'eau concourront à former ces l livres de mélange.

Pour la 1^{re} substance on aura :

$$x = \frac{la}{a+b+c}, \text{ pour la 2}^e \frac{lb}{a+b+c}, \text{ pour la 3}^e \frac{lc}{a+b+c}.$$

(35) Dans le texte arabe, on trouve : *d'après la figure de la fiancée*. D'où a pu provenir cette désignation, c'est ce qui n'a pas encore été expliqué.

(36) Comme on l'a vu, l'auteur dit expressément que les questions énoncées ci-dessus, sont inaccessibles aux algébristes de son temps. Les unes sont impossibles, les autres conduisent à des équations de degré supérieur, qui n'ont aucune racine rationnelle ; ainsi la troisième donne l'équation finale $x^4 - 20x^2 + x + 95 = 0$, la dernière question fournit les deux équations : $x^2 + x + 2 = y^2$ et $x^2 - x - 2 = z^2$, qui ne donnent pour x , que la valeur négative

$-\frac{17}{16}$. La quatrième est la plus intéressante, son impossibilité dépend du fameux théorème, énoncé pour la première fois par Fermat, en 1657, et démontré par Euler. Ainsi les Arabes l'ont eu quelques siècles avant nous.

Il ne paraît pas d'après ce qui précède que les Arabes se servissent de notations algébriques ou de symboles d'abréviation, ni qu'ils eussent quelque connaissance de l'algèbre de Diophante. D'autre part, bien qu'ils ne semblent pas avoir possédé l'algèbre hindoue dans tous ses développements, il est pourtant probable que cette science leur vint de la même source que l'arithmétique. Les traités d'algèbre arabes et persans, suivant M. Strachey, ainsi que quelques anciens ouvrages européens, commencent par l'arithmétique, que l'on y appelle l'arithmétique des Hindous ; leur seconde partie est consacrée à l'algèbre, mais elle laisse dans une complète ignorance sur l'origine de cette branche des mathématiques. Très-vraisemblablement, leur algèbre étant numérique, les auteurs la regardaient comme partie intégrante, mais dernière partie de l'arithmétique.

A. M.