

MENTION

Solution du problème sur l'axe radical

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 260-262

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__260_2>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__260_2)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME SUR L'AXE RADICAL

(t. II, p. 327) ;

PAR M. MENTION,

élève en spéciales.

Étant données deux circonférences dans le même plan :
A un point sur la première circonférence , et B un point sur
la seconde ; trouver sur l'axe radical des deux circonfé-

rences un point C, tel qu'en menant les sécantes CA, CB, elles coupent les circonférences en deux points D, E, de manière que la droite DE soit à angle droit sur l'axe radical.

Je vais d'abord déterminer le lieu des points tels qu'en les joignant à deux points fixes, la différence des angles des lignes de jonction avec la droite fixe soit donnée.

Je prends pour axes de coordonnées la droite fixe AB (fig. 31), et la perpendiculaire à cette droite élevée par le milieu O : si C est un des points du lieu, nous devons avoir :

$$\text{CBA} - \text{CAB} = \omega ;$$

d'où

$$\frac{\text{tg CBA} - \text{tg CAB}}{1 + \text{tg CBA} \text{tg CAB}} = \text{tg } \omega. \text{ Soit } \text{AB} = a. \text{ Alors } \text{tg CBA} = \frac{2y}{a-2x},$$

$$\text{tg CAB} = \frac{2y}{a+2x}; \text{ substituant dans la valeur de tg } \omega, \text{ il vient :}$$

$$\text{tg } \omega = \frac{\frac{2y}{a-2x} - \frac{2y}{a+2x}}{1 + \frac{4y^2}{a^2-4x^2}} = \frac{8xy}{a^2-4x^2+4y^2}$$

et, en chassant le dénominateur et ordonnant :

$$y^2 - \frac{2xy}{\text{tg } \omega} - x^2 + \frac{a^2}{4} = 0.$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole équilatère, ayant son centre au milieu de la droite fixe.

Pour résoudre le problème, remarquons que la ligne des centres étant parallèle à DE (fig. 32), l'angle que fait DE avec la droite AB qui joint les deux points est donné : appelons ω son supplément.

Dans le triangle ADF, nous avons $A + D = \omega$, mais le point C étant sur l'axe radical, le quadrilatère DEAB est inscriptible et partant

$$A + D = A + 180^\circ - B = \omega;$$

donc

$$A - B = -180 + \omega = \omega'.$$

Le point C appartient donc au lieu précédent :

$$y^2 - \frac{2xy}{\operatorname{tg} \omega'} - x^2 + \frac{a^2}{4} = 0,$$

et l'intersection de cette hyperbole équilatère avec l'axe radical donnera le point cherché.

Note. C'est une propriété connue de l'hyperbole équilatère, que dans le triangle formé par deux cordes supplémentaires et l'axe focal, la différence des angles à l'axe est constante; la somme est constante dans le cercle.

L'énoncé peut être ainsi généralisé : Incrire dans un cercle donné un quadrilatère ABCD; les sommets adjacents A, B sont donnés; le côté CD est donné de direction; l'intersection des côtés AC, BD est sur une ligne donnée; si cette ligne est droite, le problème est toujours susceptible d'une solution géométrique.

Rectification. Le lieu géométrique de la page 136 est de M. Jules Binder, élève en spéciales; il a été mis par mégarde sous le nom de M. Mention, qui m'a indiqué cette rectification.