

GUSTAVE GUFFLET

Solution du problème 114

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 253-255

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__253_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 114 (p. 167),

PAR M. GUSTAVE GUFFLET,

Elève de l'institution Barbet.

Dans un triangle dont la base est donnée de grandeur et de position, et dont la différence des deux autres côtés divisée par la médiane intermédiaire est égale à $\sqrt{2}$, le sommet mobile décrit une lemniscate de Bernoulli, qui est aussi une cassinoïde.

Soit $AB = 2d$ (fig. 29) la longueur donnée, C le milieu de AB, et AMB un des triangles. On a d'abord, d'après l'énoncé :

$$AM - BM = MC \sqrt{2};$$

mais on a en outre la relation :

$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MC}^2 + 2d^2.$$

Élevant au carré la première, et ajoutant à chaque membre de la deuxième la quantité $2AM.MB$, on a :

$$(AM - BM)^2 = 2\overline{MC}^2.$$

$$(AM + BM)^2 = 2\overline{MC}^2 + 2d^2 + 2AM.MB.$$

Retranchant membre à membre, on a enfin :

$$AM.MB = d^2.$$

Ce qui montre que le produit des distances d'un point quelconque du lieu aux deux points fixes A et B est une quantité

constante, propriété qui caractérise la cassinoïde ou sections toriques (Comte, *Géométrie analytique*, p. 69); de plus, la quantité constante étant égale à d^2 , la courbe aura une forme lemniscoïde (*).

On peut d'ailleurs se proposer de déterminer directement le lieu des sommets de tous les triangles; prenant pour pôle le point C, pour axe polaire la ligne AB, on aura les relations :

$$AM = \sqrt{\rho^2 + d^2 + 2d\rho \cos \omega},$$

$$MB = \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \omega},$$

d'où

$$\sqrt{d^2 + \rho^2 + 2d\rho \cos \omega} - \sqrt{d^2 + \rho^2 - 2d\rho \cos \omega} = \rho\sqrt{2},$$

d'où on tire, toute réduction faite :

$$\rho^2 = \pm d\sqrt{2 \cos 2\omega},$$

équation de la lemniscate de Bernoulli.

Pour $\omega=0$, j'ai $\rho=\pm d\sqrt{2}$. J'obtiens ainsi les deux points D, D', en admettant les valeurs négatives; ω croissant de 0 à 45° . La valeur de ρ va en diminuant depuis $d\sqrt{2}$ jusqu'à 0. J'obtiens ainsi les deux axes, CD, CD'. Cherchons le point le plus éloigné de l'axe polaire; soit M ce point, on a :

$$\begin{aligned} MP &= \rho \sin \omega = d\sqrt{2 \sin^2 \omega \cos 2\omega} \\ &= d\sqrt{(1 - \cos 2\omega) \cos 2\omega}. \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit maximum, il faut que l'on ait :

$$\cos 2\omega = 1 - \cos 2\omega,$$

(*) Le plan touchant intérieurement le tore, et parallèlement à son axe, coupe le tore suivant une cassinoïde; les autres plans parallèles à l'axe ne donnent pas des sections cassinoïdes; ce qui est évident pour un plan méridien. Les sections deviennent deux cercles, dont le système n'est pas une cassinoïde. Tm.

d'où $\cos 2\omega = \frac{1}{2}.$

Et cette valeur maximum est égale à $\frac{1}{2} d.$

On verrait facilement que la valeur de ρ , qui correspond à cette valeur de 2ω est $\rho = d$; j'obtiendrai donc ainsi les points maximum.

Pour toutes les valeurs de ω comprises entre 45 et 135° , ρ est imaginaire pour les valeurs comprises entre 135 et 180 . J'obtiens les deux arcs $CM'D'$, $CM'''D$. Cette discussion suffit pour montrer que la courbe est bien une lemniscate.

Note. M. Drot nous a adressé depuis une solution de la même question, en ne faisant usage que de coordonnées rectangulaires.