

GUILMIN

Conséquences de la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 239-244

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_239_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_239_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSÉQUENCES

de la règle des signes de Descartes,

PAR M. GUILMIN,

Ancien élève de l'École normale.

Faisons d'abord quelques remarques sur les suites de signes :

1^{re} Remarque. Le nombre des variations qu'offre une suite de signes est PAIR ou IMPAIR, suivant que les deux signes extrêmes sont SEMBLABLES OU DIFFÉRENTS.

Supposons pour fixer les idées que le 1^{er} signe soit + ; lorsqu'en lisant la suite, on compte une variation, le dernier signe qu'on a lu est — ; quand on compte deux variations, on est parvenu à un signe + ; quand on en compte trois, on vient de lire un signe — ; et ainsi de suite, chaque fois que le nombre des variations comptées est pair, le dernier signe considéré est le signe primitif + ; et chaque fois que ce nombre est impair, on en est au signe — ; si donc la suite se termine à un signe + , le total des variations est un nombre pair ; si le signe extrême est — , ce nombre est impair*.

2^e Remarque. Si entre deux signes d'une suite DONNÉE on intercale des signes arbitraires en nombre quelconque, le nombre des variations reste le même, ou augmente d'un nombre pair.

Supposons qu'on intercale des signes entre deux signes

(*) V. t. II, p. 243. Lemme I.

semblables $+$ et $+$ par exemple ; ou bien le nombre des variations n'augmente pas ; c'est ce qui arrive quand on n'écrit que des signes $+$ entre les deux signes considérés ; ou bien on introduit un nombre pair de variations ; en effet à la place de deux signes $++$ qui offrent une permanence , dans la suite générale , on écrit une suite partielle qui commençant à $+$ pour finir à $+$ ne peut offrir qu'un nombre pair de variations (1^{re} Remarque).

Supposons maintenant qu'on intercale des signes entre deux signes contraires $+$ et $-$, par exemple ; à cet endroit de la suite donnée , il y a une variation que l'on conserve simplement si les signes *intercalés* sont tous des signes $+$, ou tous des signes $-$. S'il en est autrement , à la place de deux signes $+ -$ offrant une variation , dans la suite générale , on écrit *une* suite partielle qui commençant à $+$ pour finir à $-$, ne peut offrir qu'un nombre impair $2n + 1$ de variations (1^{re} Remarque). En déduisant la variation qui existait , on voit que le nombre des variations introduites est un nombre pair $2n$.

1. En considérant une équation $f(x) = 0$ de degré m , nous désignerons par ν le nombre des variations de son 1^{er} membre $f(x)$, par P le nombre de ses permanences ; par ν' le nombre des variations du polynôme $f(-x)$ obtenu en changeant x en $-x$ dans $f(x)$.

On sait que le nombre des racines imaginaires de $f(x) = 0$ n'est pas moindre que $m - (\nu + \nu')$.

2. *Théorème.* La somme $\nu + \nu'$ des nombres de variations de $f(x)$ et de $f(-x)$, n'est jamais plus grande que le degré m de $f(x)$, l'excès $m - (\nu + \nu')$ s'il existe , ne peut être qu'un nombre pair.

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x)$ soit un polynôme complet de ce degré m ; le nombre ν de ses variations , plus le nombre P de ses permanences de signes égale m :

mais dans un pareil polynôme, de deux exposants consécutifs, l'un étant pair, l'autre impair, le remplacement de x par $-x$, change les variations en permanences, et les permanences en variations; de sorte que $\nu' = P$; or $\nu + P = m$, donc $\nu + \nu' = m$.

Supposons maintenant $f(x)$ incomplet; imaginons qu'on le complète en mettant des termes quelconques de signes arbitraires à la place des termes manquants; on obtient ainsi un polynôme $F(x)$ offrant un certain nombre de variations que nous désignerons par V ; concevons qu'on change x en $-x$ dans $F(x)$, on obtient un polynôme $F(-x)$ qui peut-être regardé comme le polynôme $f(-x)$ complété d'une certaine manière, par les termes intercalés dans $f(x)$, dans chacun desquels on aurait remplacé x par $(-x)$; soit V' le nombre des variations de $F(-x)$. Puisque $F(x)$ et $F(-x)$ sont des polynômes complets du degré m , d'après la 1^{re} partie de notre démonstration, $V + V' = m$. Mais V n'est pas moindre que ν , V' n'est pas moindre que ν' (2^e Remarque). Donc $V + V'$ ou m , n'est pas moindre que $\nu + \nu'$. On voit donc que $\nu + \nu'$ n'est jamais plus grand que m ; de plus l'excès $m - (\nu + \nu') = V + V' - \nu - \nu' = (V - \nu) + (V' - \nu')$, est toujours un nombre pair. En effet les nombres de variations intercalées $V - \nu$, $V' - \nu'$ ne peuvent être que des nombres pairs, d'après notre 2^e Remarque (*).

3. Le Théorème de Descartes est fondé sur ce lemme.

Si on multiplie un polynôme entier $f(x)$, par un binôme $x - a$, (a étant positif), le produit $f(x)(x - a)$ offre, au moins, une variation de plus que le multiplicande $f(x)$.

On peut ajouter que l'excès du nombre des variations de $f(x)(x - a)$ sur le nombre des variations de $f(x)$, est

(*) V. l'équation (8), t. II, p. 250.

toujours un nombre impair $2k+1$, quand il est supérieur à 1.

Il suffit d'observer que le dernier terme de $f(x)$, et le dernier terme du produit $f(x)(x-a)$ ont des signes contraires.

Si donc, par exemple, le 1^{er} terme de $f(x)$ est positif, et son dernier négatif, le 1^{er} terme du produit sera positif, et le dernier positif.

De $+$ à $-$, le nombre des variations de $f(x)$ est impair; de $+$ à $+$, le nombre des variations du produit est pair; l'excès du deuxième nombre sur le premier est un nombre impair*.

4. *Si la multiplication de $f(x)$ par $(x-a)$ introduit plus d'une variation, $2k+1$, par exemple, l'équation $f(x)=0$ a au moins $2k$ racines imaginaires.*

Pour le démontrer, considérons à la fois les équations :

$$(1) \quad f(x)=0, \quad (2) \quad f(x)(x-a)=0.$$

L'équation (2) a les mêmes racines que l'équation (1), plus la racine positive a .

Nommons w le nombre des variations de $f(x)(x-a)$; $w=\nu+2k+1$.

Appelons w' le nombre des variations du polynôme $f(-x)(-x-a)$, que l'on obtient en changeant x en $-x$ dans $f(x)(x-a)$.

Le nombre des racines positives de l'équation (1) ne pouvant dépasser ν , le nombre des racines positives de l'équation (2) ne peut dépasser $\nu+1$; le nombre des racines négatives, de cette même équation (2), ne peut dépasser w' ; le maximum du nombre des racines réelles de l'équation (2) est donc $\nu+1+w'$. Et le minimum du nombre de ses racines ima-

(*) Voir Corollaire, t. II, p. 249.

ginaires est $m - (\nu + 1 + w')$. Mais, d'après une démonstration précédente la somme $w + w'$ ne peut dépasser le degré $m + 1$ de $f(x)(x - a)$; on a au moins $m + 1$ égal à $w + w'$ ou à $\nu + 2k + 1 + w'$; le nombre des racines imaginaires de l'équation (2), qui n'est pas moindre que $m - (\nu + 1 + w')$ est donc au moins égal à $2k$.

Mais ce nombre des racines imaginaires de $f(x)(x - a) = 0$ est le même que celui des racines imaginaires de l'équation $f'(x) = 0$. La proposition est donc démontrée (*).

5. *L'excès du nombre des variations du 1^{er} membre d'une équation $f(x) = 0$, sur le nombre de ses racines positives, est 0 ou un nombre pair.*

Nous considérerons deux cas : 1^o Le premier terme de $f(x)$ étant positif, le dernier terme peut être positif ou négatif.

1^{er} Cas. Le nombre des racines positives de l'équation est alors pair; de $+$ à $+$, le nombre des variations de $f(x)$ est aussi pair; la différence de ces deux nombres est 0 ou un nombre pair.

2^e Cas. Le nombre des racines positives est alors impair; de $+$ à $-$, le nombre des variations de $f(x)$ est impair; la différence entre ces deux nombres impairs est 0 ou un nombre pair. Voir Lemme 3, t. II, page 249.

6. *Lorsque toutes les racines d'une équation $f(x) = 0$ sont réelles, le nombre p de ses racines positives est égal au nombre v des variations de $f(x)$, et le nombre n de ses racines négatives est égal au nombre v' des variations de $f(-x)$.*

Nous avons $p + n = m$, et $\nu + \nu'$ pas plus grand que m . (m étant le degré de $f(x)$). Mais ν n'est pas moindre que p , ν' n'est pas moindre que n ; par suite $\nu + \nu'$ n'est pas moindre que $p + n$ ou m ; donc $\nu + \nu' = m$, d'où $\nu + \nu' = p + n$. Il résulte de là

(*) La démonstration de ce théorème de M. Sturm, donnée p. 116, est plus complète et me semble plus courte. Tm.

que p qui n'est jamais plus grand que ν , ne peut dans ce cas particulier être moindre que ν , sans quoi n serait plus grand que ν' , ce qui est impossible. Donc $p = \nu$, et par suite $n = \nu'$.

Si l'équation $f(x) = 0$ est complète et a toutes les racines réelles, le nombre de ses racines négatives est égal au nombre P des permanences de son premier membre; car ce nombre P est alors égal au nombre ν' des variations de $f(x)$.

Corollaire du théorème 4. En faisant $a = 1$, on arrive facilement à cette conséquence : Retranchez chaque coefficient de $f(x)$ du coefficient de la puissance de x immédiatement inférieure, écrivez seulement le signe du reste, en tête de cette suite de signes, mettez le signe $+$ du 1^{er} terme de $f(x)$; si la suite de signes ainsi obtenue, offre $2k + 1$ variations de plus que $f(x)$, l'équation $f(x) = 0$ a au moins $2k$ racines imaginaires.

(La suite prochainement.)