

AUGUSTE MIQUEL

Problème d'optique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 235-238

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__235_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME D'OPTIQUE.

PAR M. MIQUEL (AUGUSTE).

Problème. Deux lumières dont les couleurs sont complémentaires et dont les intensités sont a et a' étant placées à des distances quelconques h et h' au-dessus d'un plan, on demande sur ce plan le lieu géométrique apparent de la lumière blanche.

Solution. L'intensité de la lumière apparente sur une surface plane étant en raison inverse du carré de la distance du point lumineux à l'élément infiniment petit que l'on considère sur la surface plane, et en raison directe du sinus de l'inclinaison du rayon lumineux sur cet élément; en appelant p un des points du lieu géométrique demandé, et en désignant par B et B' les projections des points A et A' sur ce plan, on doit avoir :

$$\frac{a}{AP^2} \sin APB = \frac{a'}{A'P^2} \sin A'PB',$$

équation qui revient à $\frac{ah}{AP^3} = \frac{a'h'}{A'P^3}$. h, h' sont les distances

respectives au plan des points A et A' ; de cette égalité on déduit la proportion $AP : A'P :: \sqrt[3]{ah} : \sqrt[3]{a'h'}$. Par conséquent le problème se trouve ramené à trouver le lieu géométrique de tous les points du plan donné, dont les distances aux points A et A' de l'espace sont entre elles dans un rapport donné. Le lieu demandé n'est donc autre chose que la circonférence de cercle, intersection du plan donné avec la surface sphérique qui est le lieu géométrique de tous les points de l'espace dont les distances aux points A et A' sont dans le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$.

Cela posé, je rabats sur le plan donné, au tour de la droite BB', le trapèze BAA'B' ; par les points A et A', je mène deux parallèles, AM, A'M', respectivement égales à $\sqrt[3]{ah}$ et $\sqrt[3]{a'h'}$, ou dans le même rapport ; je joins MM', que je prolonge jusqu'à la rencontre de la droite indéfinie AA' en un point D, qui, à cause de la similitude des triangles AMD, A'M'D, sera tel, que les distances aux points A et A' seront entre elles dans le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$. Prenons encore sur la parallèle menée par le point A' une distance AM'' égale à A'M' et dirigée en sens inverse, et joignons MM'', l'intersection de cette droite MM'' avec la droite AA' donnera un second point D' dont les distances aux points A et A' seront dans le même rapport que AD et A'D. Sur DD' comme diamètre décrivons une circonférence de cercle. Soient G et G' les points d'intersection de cette circonférence avec la droite indéfinie BB' ; sur GG' comme diamètre décrivons une seconde circonférence de cercle, qui sera le lieu géométrique demandé.

En effet, si nous relevons le plan AA'BB' dans sa position verticale, la sphère décrite sur DD', sphère qui, d'après la construction des points D et D', est le lieu géométrique des points de l'espace dont les distances aux points A et A' sont

entre elles dans le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$, coupera évidemment la droite BB' aux points G et G' ; et comme son centre est situé sur une perpendiculaire au plan donné menée par un des points de BB' , son intersection avec le plan donné n'est autre chose que la circonférence décrite dans ce plan sur le diamètre GG' .

Il peut arriver que la sphère décrite sur DD' comme diamètre ne fasse que toucher le plan donné, ou qu'elle ne le rencontre pas du tout. Par conséquent, le lieu géométrique demandé peut se réduire à un point, et devenir imaginaire.

Le problème précédent se construit évidemment avec la règle et le compas quand le rapport de $\sqrt[3]{ah}$ à $\sqrt[3]{a'h'}$ a été obtenu en lignes, ce qui peut toujours se faire d'une manière approximative (*).

Théorème. Lorsqu'on prend d'un même côté d'un centre C d'un cercle, sur un rayon suffisamment prolongé, deux points A et B tels que le rayon soit moyen proportionnel entre leurs distances au centre; le rapport des distances de chacun de ces points à un point quelconque de la circonférence est précisément égal à celui des racines carrées des distances de ces mêmes points A et B au centre du cercle.

Démonstration. Soit joint un point quelconque P de la circonférence aux points A et B et au centre C . Puisqu'on a par construction la proportion $AC : PC :: PC : BC$, les deux triangles ACP , BCP ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables, et la comparaison de leurs côtés homologues fournit les proportions :

$$\begin{aligned} AP : BP &:: AC : PC, \\ AP : BP &:: PC : BC. \end{aligned}$$

* V. t. III. p. 115, note.

En les multipliant terme à terme on a :

$$\overline{AP}^2 : \overline{BP}^2 :: AC : BC ;$$

et, par conséquent,

$$AP : BP :: \sqrt{AC} : \sqrt{BC}.$$

Corollaire. De là résulte cette proposition connue que le lieu géométrique de tous les points de l'espace dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est une sphère dont le rayon est moyen proportionnel entre les distances de ces mêmes points au centre de cette sphère. On peut la construire lorsque le rapport des carrés, tels que $\overline{AP}^2$ et $\overline{BP}^2$, est donné, en menant par les points A et A' deux parallèles, AB, A'B', qui soient entre elles dans le rapport donné ; en menant la droite BB' jusqu'à la rencontre de la droite indéfinie AA' en un point C, qui sera le centre de la sphère demandée. On obtiendra son rayon en faisant passer par les points A et A' une circonférence de cercle à laquelle il suffira de mener par le point C une tangente qui se termine au point du contact ; car cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière CA et sa partie extérieure CA.

Note. Ce problème revient à trouver sur le plan le lieu du point qui reçoit une égale quantité de lumière des points éclairants A et A' ; la solution et la construction sont analogues à celles que M. Gérono a données pour un problème du même genre (t. III, p. 115). Soit l la longueur AA' et α son inclinaison sur le plan ; faisons $n^2 = \frac{ah}{a'h'}$; si l'on a :

$$(h + h')(1 - n^2) - l \sin \alpha (1 + n^2) = 2nl,$$

le lieu se réduit à un point ; et si le premier membre surpasse le second, le problème est impossible. Si $a=a'$ et $h=h'$, le lieu est une droite.

Tm.